X
D-B

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 163

Heft 3

Ausgegeben den 8. Dezember 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Band 163. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Schmeidler, Werner, Zum Äquivalenzproblem beschränkter Bilinearformen	135
Magnus, Wilhelm, Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)	141
Wellstein, Julius, Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen	166

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Zum Äquivalenzproblem beschränkter Bilinearformen.

Von *Werner Schmeidler* in Breslau.

Einleitung.

Im folgenden wird bewiesen, daß jede beschränkte Bilinearform von unendlich vielen Variablen [1]) im Sinne der Äquivalenz in eine solche transformiert werden kann, die in einfachster Weise aus Bestandteilen zusammengesetzt ist, bei deren jedem höchstens in der Hauptdiagonale und der darunter liegenden parallelen Schrägzeile von Null verschiedene Elemente stehen. Der Beweis erfolgt schrittweise.

§ 1. Halbunitäre Matrizen.

Wir nennen eine Matrix A halbunitär, und zwar rechts- bzw. linksunitär, wenn die Gleichung

$$A \cdot \bar{A}' = E \text{ bzw. } \bar{A}' \cdot A = E$$

besteht, ohne daß gleichzeitig die andere zu bestehen braucht. Alle halbunitären Matrizen sind beschränkt.

Eine rechtsunitäre Matrix ist unitärorthogonal, wenn die homogenen Gleichungen $A \cdot x = 0$ (Abkürzung für $\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta = 0$) keine Lösungsspalte x von konvergenter Quadratsumme besitzen; dies folgt in bekannter Weise aus der Identität

$$A \cdot (\bar{A}' \cdot A - E) = 0.$$

Entsprechendes gilt für linksunitäre Matrizen.

Um das Äquivalenzproblem zunächst für rechtsunitäre Matrizen zu lösen, bilden wir die unitär orthogonale Ergänzung zu A, d. h. diejenigen Zeilen, die zu A hinzugefügt, diese zu einer unitären Matrix machen. Für die entsprechenden konjugiertkomplexen Spalten x gilt dann $A \cdot x = 0$, und ihre Gesamtheit X bildet das volle Lösungssystem dieser Gleichung in dem Sinne, daß jede Lösung y von konvergenter Quadratsumme von $A \cdot y = 0$ eine lineare Kombination dieser Spalten wird. In der Tat folgt in leicht verständlicher Schreibweise aus

$$\begin{pmatrix} A \\ \bar{X}' \end{pmatrix} (\bar{A}'\ X) = E, \quad (\bar{A}'\ X) \begin{pmatrix} A \\ \bar{X}' \end{pmatrix} = E$$

nicht nur $A \cdot X = 0$, sondern aus der zweiten Gleichung ergibt sich durch hintere Multiplikation mit der Spalte y wegen $A \cdot y = 0$:

$$y = X \cdot \bar{X}' \cdot y,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Die Anzahl d der Spalten x heißt der „hintere Defekt“ von A. Bei vorgegebenem X kann umgekehrt in demselben Sinne A als volles Lösungssystem von $\bar{z}' \cdot X = 0$ betrachtet werden.

[1]) Vgl. für alles folgende den Enzyklopädieartikel von Hellinger-Toeplitz über Integralgleichungen und unendlich viele Variable.

Wir bilden nun folgende Matrix:

$$C = \left(\begin{matrix} X & \overline{A}' \cdot X & \overline{A}^{2\prime} \cdot X & \\ | & | & | & \cdots \end{matrix} \right),$$

die offenbar linksunitär und damit beschränkt ist. Analog wie oben die rechtsunitäre Matrix A ergänzen wir nunmehr C durch Hinzufügung gewisser Spalten Y zu einer unitärorthogonalen Matrix Γ, so daß $\overline{Y}' \cdot C = 0$ gilt. Dann ist auch $\overline{Y}' \cdot X = 0$ und damit nach den obigen Ausführungen $\overline{Y}'$ in der Form $\overline{Y}' = \overline{Z}' \cdot A$ darstellbar, woraus $Y = \overline{A}' \cdot Z$ folgt. Wir erhalten neben $\Gamma \cdot \overline{\Gamma}' = \overline{\Gamma}' \cdot \Gamma = E$ die Beziehung

$$A \cdot \Gamma = \left(\begin{matrix} 0 & X & \overline{A}' \cdot X & & Z \\ | & | & | & \cdots & | \end{matrix} \right) = \Gamma \cdot \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ | & 0 & 1 & 0 & \\ | & 0 & 0 & 1 & \cdots 0 \\ | & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & & U \end{matrix} \right)$$

$$= \Gamma \cdot N,$$

wobei $Y \cdot U = Z = \overline{A}' \cdot Z \cdot U$ und daraus wegen $\overline{Z}' \cdot Z = E$ die Darstellung $U = \overline{Z}' \cdot A \cdot Z$ folgt. Es gilt ferner $\overline{\Gamma}' \cdot A \cdot \Gamma = N$, und N ist rechtsunitär. Dies gilt daher auch für U, während andererseits die Gleichung $U \cdot t = 0$ keine Lösungsspalte t von konvergenter Quadratsumme besitzen kann, weil eine solche zu einer durch X nicht darstellbaren Lösung von $A \cdot x = 0$ führen würde. Daher ist U unitärorthogonal, und wir gewinnen den

Satz I [2]: *Jede rechtsunitäre Matrix A ist äquivalent (und zwar unitärorthogonaläquivalent) mit einer Matrix N der Form*

$$N = \begin{pmatrix} N_d & O \\ O & E_r \end{pmatrix}, \quad \textit{es ist also } \overline{\Gamma}' \cdot A \cdot \Gamma = N,$$

wobei N_d aus der unendlichen Einheitsmatrix durch Voransetzen von $d(\leqq \infty)$ Nullspalten entsteht und E_r die Einheitsmatrix von $r(\leqq \infty)$ Zeilen und Spalten bedeutet. Die Zahlen d und r bestimmen die Normalform eindeutig und liefern bei verschiedener Wahl von d und r stets nichtäquivalente Matrizen gegenüber den genannten Transformationen.

Die letzte Behauptung ist klar in bezug auf d, insofern Normalformen N mit verschiedenem d verschiedene Anzahlen von Lösungen der Gleichungen $N \cdot z = 0$ ergeben. Ferner seien zwei rechtsunitäre Matrizen A und B gegeben, die unitärorthogonaläquivalent sind.

Wir bezeichnen dann wie oben mit C die aus den Spalten $X, \overline{A}' \cdot X, \ldots$ gebildete Matrix, deren vorderer Defekt mit r übereinstimmt, ferner mit D eine entsprechend aus $Y, \overline{B}' \cdot Y, \ldots$ gebildete Matrix, wobei Y die Ergänzungsspalten von B sind. Wegen $A = \overline{U}' \cdot B \cdot U$ kann dann $Y = U \cdot X$ gesetzt werden, und folglich $D = \overline{U}' \cdot C$. Die Defekte von C und D stimmen daher überein. Die Zahlen d und r liefern also für rechtsunitäre Matrizen ein vollständiges Invariantensystem gegenüber unitärorthogonalen Transformationen.

Auf der anderen Seite liegt auf der Hand, daß die Zahl r bedeutungslos wird, wenn man die Beschränkung auf unitärorthogonale Transformationen fallen läßt und beliebige beschränkte und abgeschlossene Transformationen zuläßt. Zu diesen gehören beliebige

---

[2]) Der Satz betrifft nicht direkt das allgemeine Äquivalenzproblem, da er sich mit speziellen Transformationen der Form $\overline{\Gamma}' \cdot A \cdot \Gamma = N$ beschäftigt. Er scheint mir aber an sich von Interesse zu sein.

Vertauschungen von Spalten; durch solche Vertauschungen kann aber die Matrix N bei beliebigem r stets auf die Form N_d transformiert werden. Somit gilt

Satz II. *Jede rechtsunitäre Matrix ist zu einer durch den Defekt d allein bestimmten Normalmatrix der Form N_d äquivalent.*

Analoge Ergebnisse gelten für linksunitäre Matrizen [3]).

§ 2. Matrizen mit einseitigen Reziproken.

Wir verallgemeinern das bisherige Ergebnis, indem wir von einer Matrix A ausgehen, von der die Existenz einer hinteren Reziproken, die aber nicht zugleich eine vordere zu sein braucht, bekannt ist. Es sei also

$$A \cdot R = E,$$

und R sei wie A beschränkt. Offenbar ist dann das Vorhandensein von Lösungen der Gleichungen $\bar{x}' \cdot A = 0$ mit konvergenter Quadratsumme ausgeschlossen. Die Zeilen von A bilden also linear unabhängige Vektoren des Raumes von unendlich vielen Dimensionen und lassen sich nach dem bekannten Verfahren von E. Schmidt orthogonalisieren. In Matrizensprache ausgedrückt bedeutet dies die Existenz einer zeilenfiniten Matrix C, für die $C \cdot A = B$ rechtsunitär, also beschränkt ist. Wegen $C = B \cdot R$ ist auch C beschränkt und übrigens abgeschlossen, da auch umgekehrt formal $A = D \cdot B$ geschrieben werden kann, wobei D ebenfalls zeilenfinit und $= A \cdot \bar{B}'$, also beschränkt ist. Die hierbei benutzte Anwendung des assoziativen Gesetzes für die Multiplikation mit den formal definierten Matrizen C bzw. D ist erlaubt nach dem

Hilfssatz: *Ist C zeilenfinit und sind A und B beschränkt, so ist*

$$C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

In der Tat ist in der Summe $\sum_{\alpha} c_{n\alpha} \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} b_{\beta m}$, in der α nur endlich viele Indizes durchläuft, lediglich die Umordnung vorzunehmen in $\sum_{\beta} (\sum_{\alpha} c_{n\alpha} a_{\alpha\beta}) b_{\beta m}$, d. h. es ist eine Summe von endlich vielen unendlichen Reihen in eine einzige solche Reihe zusammenzufassen.

Nach dem Gesagten ist A im vorliegenden Falle einer rechtsunitären Matrix äquivalent, also auf die im vorigen Paragraphen erwähnte Normalform N_d, die lediglich durch die Anzahl der Lösungen der Gleichung $A \cdot x = 0$ bestimmt ist, zurückführbar.

Analoges gilt, falls A eine vordere beschränkte Reziproke besitzt.

§ 3. Ein weiterer Sonderfall.

Wir stützen uns nunmehr auf den bekannten Toeplitzschen Satz, nach dem für die Existenz einer vorderen (hinteren) Reziproken einer beschränkten Matrix A notwendig und hinreichend ist, daß die Hermitesche Form $A \cdot \bar{A}'(x, x)$ bzw. $\bar{A}' \cdot A(x, x)$ oberhalb einer von Null verschiedenen Schranke bleibt, falls x die Quadratsumme 1 hat. In den beiden vorangehenden Paragraphen traf dies für eine der beiden Hermiteschen Formen zu, nicht für die andere, da ja Lösungen der homogenen Gleichungen $A \cdot x = 0$ vorhanden waren. Wir wollen nun zulassen, daß beiderseits homogene Lösungen vorhanden seien, also sowohl für die Gleichungen $A \cdot x = 0$ als auch für $\bar{y}' \cdot A = 0$, wollen aber voraussetzen, daß für alle Wertsysteme x von der Quadratsumme 1, die kein Lösungssystem einer dieser beiden Gleichungen sind, stets $A \cdot \bar{A}'(x, x)$ und $\bar{A}' \cdot A(x, x)$ oberhalb einer von Null verschiedenen Schranke bleiben.

---

[3]) Wegen eines einfacheren Beweises von Satz II vgl. § 3.

Es sei dann X ein volles unitär normiertes Lösungssystem der Gleichungen $A \cdot x = 0$. Wir können die Spalten X durch gewisse Spalten W zu einer unitärorthogonalen Matrix U, die also beschränkt und abgeschlossen ist, ergänzen und erhalten

$$A \cdot U = (0 \;\; A \cdot W)\,^{4}).$$

Die Matrix $A \cdot W$ besitzt nun eine vordere Reziproke. In der Tat ist $\overline{W}' \cdot \overline{A}' \cdot A \cdot W(z, z)$ für alle Wertsysteme z von der Quadratsumme 1 oberhalb einer festen Schranke m gelegen, weil jede Spalte $W \cdot z$ von den Spalten X linear unabhängig ist; aus einer Darstellung $W \cdot z = X \cdot u$ würde nämlich nach Multiplikation mit $\overline{W}'$ wegen $\overline{W}' \cdot X = 0$ folgen $z = 0$.

Nach dem vorangehenden Paragraphen ist nun $B = A \cdot W$ äquivalent mit einer Normalform der Form $\overline{N}'$, d. h. es gibt zwei abgeschlossene beschränkte Matrizen P und Q, so daß $P \cdot B \cdot Q = \overline{N}'$ wird. Bilden wir dann die Matrix $Q^* = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, wobei E die Einheitsmatrix von so vielen Zeilen und Spalten bedeutet, als die Anzahl der Spalten X angibt, so ist Q^* ebenfalls beschränkt und abgeschlossen, und es wird $P \cdot A \cdot U \cdot Q^*$ eine Normalform, die aus der Einheitsmatrix von unendlich vielen Zeilen und Spalten durch Hinzufügung von so viel Zeilen, als der vordere Defekt angibt, und von so viel Spalten, als der hintere Defekt angibt, und die sämtlich Nullen enthalten, hervorgeht. Auch diese Normalform ist daher eindeutig durch die Angabe dieser beiden Anzahlen bestimmt.

§ 4. Der allgemeine Fall

Es sei jetzt A eine ganz beliebige beschränkte Matrix. Wir bilden wiederum ein volles unitär normiertes System X von Lösungen der Gleichung $A \cdot x = 0$, und ergänzen X durch Hinzufügung gewisser Spalten W zu einer unitärorthogonalen Matrix U. Es wird dann wieder

$$A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & A \cdot W \\ | & | \end{pmatrix},$$

und die Matrix $B = A \cdot W$ hat alsdann keine Lösungen mehr für die Gleichung

$$B \cdot z = 0,$$

weil wiederum $W \cdot z = X \cdot u$ unmöglich ist. Sind ferner die Zeilen $\overline{Y}'$ ein volles normiertes System von Lösungen der Gleichung $\overline{y}' \cdot A = 0$, und ergänzen wir diese Zeilen zu einer unitärorthogonalen Matrix V durch Hinzufügung gewisser Zeilen $\overline{T}'$, so ist

$$V \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\qquad\qquad} \\ | & \overline{T}' \cdot A \cdot W \end{pmatrix}$$

wobei die Anzahl der Nullzeilen mit der von $\overline{y}'$, die der Nullspalten mit der Anzahl von X übereinstimmt, und wobei jetzt

$$C = \overline{T}' \cdot A \cdot W$$

weder für die vorderen noch für die hinteren Gleichungen Lösungen besitzt. In der Tat würden solche Lösungen lineare Verbindungen von $\overline{T}'$ bzw. von W ergeben, die die entsprechenden Gleichungen für A lösen, was nicht möglich ist.

---

[4]) Zum Beweise von Satz II genügt es, einfach $W = \overline{A}'$ zu setzen.

Satz III. *Jede beschränkte Matrix kann im Sinne der Äquivalenz in eine andere transformiert werden, die aus einer Matrix ohne vorderen und hinteren Defekt durch Hinzufügung gewisser Nullzeilen bzw. -spalten entsteht.*

Wird nun die so entstehende Matrix C ohne vorderen und hinteren Defekt im Sinne der Äquivalenz weitertransformiert, so kann auch die gegebene Matrix in derselben Weise weitertransformiert werden, indem man zu den Transformationsmatrizen gewisse Einheitsmatrizen von passender Größe hinzufügt und die seitlichen Elemente durch Nullen ersetzt. Jede Normalform für C liefert daher auch eine solche für A, indem man einfach dieselben Nullzeilen bzw. -spalten zu ihr hinzufügt, die man zu C hinzufügen muß, um $V \cdot A \cdot U$ zu erhalten.

Das Problem reduziert sich also auf die Untersuchung von Matrizen A, für die weder die vorderen noch die hinteren Gleichungen Lösungen besitzen.

Für diese Matrizen ist jetzt $A \cdot \bar{A}'(x, x)$ definit positiv. Nach einem Satze von Toeplitz gibt es nun eine unitärorthogonale Transformation U, so daß $U \cdot A \cdot \bar{A}' \cdot \bar{U}'$ eine Summe von Jakobischen Formen wird, das heißt von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \\ 0 & J_2 & 0 & . . \\ 0 & 0 & J_3 & \\ . & . & . & \end{pmatrix},$$

wobei jedes J von der Form

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & -\bar{b}_1 & 0 & \\ -b_1 & a_2 & -\bar{b}_2 & . . \\ 0 & -b_2 & a_3 & \\ . & . & . & \end{pmatrix}$$

ist.

Es treten also in jedem J nur in der Hauptdiagonale und in den beiden benachbarten Schrägzeilen von Null verschiedene Elemente auf. Wir beschränken uns im folgenden für die Darstellung auf den Fall einer einzigen solchen Matrix $J = J_1$; der allgemeine Fall ist analog zu behandeln.

Wegen des definit positiven Charakters der Form sind alle Hauptunterdeterminanten der Matrix positiv, da ihre Quotienten und das erste Element nach dem Kroneckerschen Reduktionssatze einer endlichen Hermiteschen Form als Werte der Form auftreten. Setzen wir also

$$J = L \cdot \bar{L}'$$

und

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & . . \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \\ . & . & . & \end{pmatrix},$$

so werden die Quadrate der α_n gleich den Determinantenquotienten, also positiv, und damit die α_n selbst reell und können ebenfalls positiv gewählt werden. Für β_n ergibt sich dann eindeutig $\alpha_n \beta_n = -b_n, \beta_n = -\dfrac{b_n}{\alpha_n}$.

Aus $U \cdot A \cdot \bar{A}' \cdot \bar{U}' = L \cdot \bar{L}'$ ergibt sich nun mit Hilfe der formalen Reziproken R von L:

$$R \cdot (U \cdot A \cdot \bar{A}' \cdot \bar{U}') \cdot \bar{R}' = E.$$

Wendet man den Hilfsatz von § 2 in einer leichten Verallgemeinerung auf gleichzeitige hintere Multiplikation mit einer kolonnenfiniten Matrix an, so folgt hieraus:

$$(R \cdot U \cdot A) \cdot (\bar{A}' \cdot \bar{U}' \cdot \bar{R}') = E.$$

Die Matrix $R \cdot U \cdot A$ ist daher rechtsunitär, also beschränkt. Hätten aber die Gleichungen $R \cdot U \cdot A \cdot x = 0$ eine Lösung von konvergenter Quadratsumme, so würde man daraus wiederum mit Hilfe des Hilfssatzes finden $A \cdot x = 0$, was nicht der Fall ist. Daher ist

$$R \cdot U \cdot A = V \text{ unitärorthogonal, also abgeschlossen,}$$

also

$$U \cdot A = L \cdot V,$$

und somit A zu L äquivalent.

Satz IV: *Jede beschränkte Matrix ist äquivalent einer Normalform, die durch Hinzufügung gewisser Nullzeilen und Nullspalten aus einer Summe*[5]) *von Matrizen entsteht, die jeweils lediglich in der Hauptdiagonale und der darunterliegenden*[6]) *Schrägzeile von Null verschiedene Elemente enthalten. Die Anzahl der Nullspalten ist gleich dem hinteren, die der Nullzeilen gleich dem vorderen Defekt, die Diagonalelemente sind sämtlich positiv und ihre Folge ist beschränkt. Letzteres gilt auch von der Folge der Elemente der Schrägzeile.*

[5]) Unter der Summe der Matrizen $A, B, C, \ldots$ verstehe ich hier die Matrix:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \\ 0 & B & 0 & \\ 0 & 0 & C & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}.$$

[6]) Wenn man will, kann man auch die darüberliegende Schrägzeile bevorzugen. Man hat dann von $\bar{A} \cdot A(x,x)$ auszugehen.

Breslau, den 11. November 1929.

Eingegangen 14. November 1929.

Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. (Der Freiheitssatz).

Von *Wilhelm Magnus* in Frankfurt am Main.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung: Seite

Identitätsproblem, Wurzelproblem 141

Erster Teil: Der Freiheitssatz.

§ 1. *Formulierung des Freiheitssatzes* 142

§ 2. *Einfache Hilfsmittel* 143

(1) Identitätsproblem für die freie Gruppe. (2) Normalform der Worte, die in einer gegebenen Gruppe gleich eins sind. (3) Invarianten gegenüber identischen Umformungen. (4) Transformierte als neue Erzeugende. Unabhängigkeit derselben.

§ 3. *Reduktion des Beweises des Freiheitssatzes auf zwei Hilfssätze* 145

(1) Fallunterscheidung. (2) Fall I. (3) Fall II. (4) Beweisplan. (5) Formulierung dreier Hilfssätze; Reduktion auf die beiden ersten. (6) Beweis des Freiheitssatzes.

§ 4. *Beweis der beiden Hilfssätze* 151

(1) Hilfssatz 1, (2) Hilfssatz 2.

§ 5. *Erweiterung von Hilfssatz* 1. *Verwandte Hilfssätze. Unabhängigkeitssätze* 154

(1) Erweiterung von Hilfssatz 1. (2) Hilfssatz 4. (3) Hilfssatz 5.

Zweiter Teil: Anwendungen des Freiheitssatzes und der Hilfssätze von § 5.

§ 6. *Äquivalente Relationen. Primitive Elemente* 157

(1) Vorbemerkung: Eine Hauptform des Freiheitssatzes. (2) Äquivalente Relationen. (3) Wurzeln von $aba^{-1}b^{-1}$.

§ 7. *Beispiele zu der Aufgabe: Alle Wurzeln eines gegebenen Wortes zu finden* 160

(1) Vorbemerkung. (2) Der Ansatz. (3) Haupthilfssatz. (4) Anwendungen. (4 a) Erstes Beispiel. (4 b) Ähnliche Beispiele.

Anhang:

§ 8. *Bemerkungen über Gruppen mit zwei definierenden Relationen* 164

Einleitung.

Herr Dehn hielt 1922 in Leipzig einen (nicht publizierten) Vortrag über Topologie und allgemeine Gruppentheorie. In dessen gruppentheoretischem Teil entwickelte er den Ansatz zu einem allgemeinen Kalkül für diskontinuierliche Gruppen. Die vorliegenden Ausführungen sind auf Anregung von Herrn Dehn entstanden, und geben — mit modifizierten Beweisen — einen großen Teil der dabei erzielten Ergebnisse wieder, insbesondere den für den Aufbau notwendigen „Freiheitssatz“; darüber hinaus enthalten sie Sätze, welche Herr Dehn in Frankfurter Vorträgen entwickelte, sowie eine Reihe allgemeiner und spezieller Sätze als Anwendungen der Theorie.

Ausgangspunkt ist die folgende Darstellung des *Identitätsproblems* der Gruppentheorie:

Gegeben sind Zeichen $a, a^{-1}; b, b^{-1}; \ldots$. Aneinanderreihungen derselben heißen *Worte.* Das Wort, das aus überhaupt keinem Zeichen besteht, wird mit 1 bezeichnet. Zwei Worte W_1 und W_2 heißen *identisch*, wenn es möglich ist, W_1 durch Hinzufügen und Fortlassen der speziellen Worte $aa^{-1}, a^{-1}a; bb^{-1}, b^{-1}b; \ldots$ in W_2 zu verwandeln. Bezeichnung: $W_1 \equiv W_2$. Es ist insbesondere $aa^{-1} \equiv 1$, $a^{-1}a \equiv 1; \ldots$

Die Frage, wann ein beliebig vorgegebenes Wort W durch identische Umformungen und durch Hinzufügen und Fortlassen der speziellen, fest gegebenen Worte $R_1, R_2, \ldots$ und ihrer „reziproken" $R_1^{-1}, R_2^{-1}, \ldots$ (welche durch $R_1 R_1^{-1} \equiv 1 \ldots$ bis auf identische Umformungen eindeutig bestimmt sind) in das zeichenlose Wort verwandelt werden kann, ist dann das Identitätsproblem für die Gruppe mit den Erzeugenden $a, b, \ldots$ und den definierenden Relationen $R_1 = 1, R_2 = 1, \ldots$: W ist $= 1$ auf Grund der Relationen $R_1 = 1, R_2 = 1, \ldots$

Für das Folgende beschränkt man sich auf einrelationige Gruppen. Folgt aus $R = 1$, daß $W = 1$ ist, so soll R eine *Wurzel* von W heißen. Das Identitätsproblem fragt, ob R Wurzel für irgendein gegebenes Wort W ist. Man kann versuchen, es unter Umkehrung der Fragestellung zu behandeln durch Lösen der viel umfassenderen Aufgabe: Zu einem gegebenen Wort W alle Wurzeln zu finden. Diese Aufgabe ist das einfachste „*Wurzelproblem*"; das allgemeine Wurzelproblem würde verlangen, alle Systeme von n Relationen $R_1 = \cdots = R_n = 1$ zu finden, aus denen $W = 1$ folgt. In der Tat schließt die Lösungen des Wurzelproblems die des Identitätsproblems ein; denn wenn man wissen will, ob in einer Gruppe mit den Erzeugenden $a, b, \ldots$ und der Relation $R = 1$ das Wort W gleich eins ist, hat man — nach Lösung des Wurzelproblems für W — nur zu untersuchen, ob R zu den Wurzeln von W gehört.

Die erste Frage, die man sich bei Behandlung des Wurzelproblems stellen wird, ist die nach den Wurzeln der „einfachsten" Worte: der Erzeugenden; also die Frage: Wie muß R beschaffen sein, damit in der Gruppe mit den Erzeugenden $a, b, \ldots$ und der Relation $R = 1$ $a = 1$ wird? Die Antwort ist die wichtigste Konsequenz des „Freiheitssatzes", (der unten ausführlich formuliert wird) und lautet: Es muß $R \equiv T_1 a T_1^{-1}$ oder $R \equiv T_2 a^{-1} T_2^{-1}$ sein, wobei T_1 bzw. T_2 beliebige Worte sind. Das heißt: a besitzt nur triviale Wurzeln: die Transformierten von $a^{\pm 1}$.

Im ersten Teil dieser Arbeit soll der Freiheitssatz formuliert und bewiesen werden. Der zweite Teil wird Anwendungen desselben und Ansätze zur Lösung des (einfachsten) Wurzelproblems enthalten. In einem Anhang werden Bemerkungen über Gruppen mit zwei definierenden Relationen folgen.

Erster Teil: Der Freiheitssatz.

§ 1. Formulierung.

Gegeben sind Erzeugende $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und x, und eine Relation zwischen diesen: $R(a_1, \ldots, a_n; x) = 1$. Folgt dann aus $R = 1$ eine Relation $W(a_1, \ldots, a_n) = 1$ zwischen den a alleine, welche nicht identisch erfüllt ist, (läßt sich also das x sozusagen eliminieren), dann ist $R \equiv TS(a_1, \ldots, a_n)T^{-1}$, wobei T (eventuell) das x enthält, und es folgt $W = 1$ aus $S = 1$.

Also: Enthält R, „zyklisch geschrieben" [1]) das x noch wirklich, das heißt: kann man in dem zyklisch geschriebenen R nicht durch identische Umformungen erreichen,

[1]) bei einem zyklisch geschriebenen Wort darf man das erste Zeichen als dem letzten benachbart ansehen, und dementsprechend identische Umformungen vornehmen.

daß es das x nicht mehr enthält (wie man entscheidet, ob dies möglich ist oder nicht, geht aus dem Anfang von § 2 hervor), dann besteht zwischen $a_1, \ldots, a_n$ überhaupt keine nicht identisch erfüllte Relation: a_1 bis a_n bilden in der Gruppe mit der Relation $R = 1$ eine *freie Gruppe.*

§ 2. Einfache Hilfsmittel.

1. Es ist zunächst eine Lösung des *Identitätsproblems für freie Gruppen* erforderlich. Diese wird geliefert durch den Satz: Ist ein Wort W aus den Zeichen $a, b, c, \ldots$ identisch eins, so kann es alleine durch wiederholtes *Fortlassen* von aa^{-1}, $a^{-1}a$; ... in das zeichenlose Wort verwandelt werden, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge man diese Fortlassungen vornimmt. Eine Konsequenz dieses Satzes ist: Enthält ein Wort W (gewöhnlich bzw. zyklisch geschrieben) eine bestimmte Erzeugende x auch dann noch, wenn es nicht mehr durch „*Absorptionen*" „vereinfacht" werden kann, das heißt, wenn man keine Worte $aa^{-1}, a^{-1}a, \ldots$ daraus fortlassen kann, dann ist diese Erzeugende x aus W durch identische Umformungen überhaupt nicht fortzuschaffen (vgl. § 1).

2. *Normalform der Worte, die in einer gegebenen Gruppe gleich eins sind.* Der Beweis des ebenen ausgesprochenen Satzes wird ebenso geführt wie der des nachfolgenden Satzes, welcher eine Art Normalform liefert für *die* Worte W aus Erzeugenden $a, b, \ldots$, welche auf Grund der Relationen

$$R_1 = 1, \quad R_2 = 1, \ldots, R_n = 1 \tag{1}$$

gleich eins sind. In diesem Falle ist nämlich:

$$W \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i R_{\nu_i}^{e_i} T_i^{-1} \tag{N}$$

wobei das Produktzeichen symbolisch ist: Die Faktoren des Produktes sind nicht vertauschbar. Die Transformierenden T_i sind irgendwelche Worte; e_i hat einen der Werte ± 1, ν_i einen der Werte $1, 2, \ldots, n$. (Daß umgekehrt W auf Grund der Identität (N) in der Gruppe: $a, b, \ldots; R_1 = 1, \ldots, R_n = 1$ gleich eins ist, ist trivial).

Beweis: Der Satz ist richtig für alle Worte $\overline{W}$, die sich durch identische Umformungen und *einmaliges* Hinzufügen oder Fortlassen eines $R_\nu^{\pm 1}$ in das zeichenlose Wort verwandeln lassen. Er sei als bewiesen angenommen für alle Worte $\overline{W}$, welche sich durch höchstens *m-maliges* ($m \geqq 1$) Fortlassen und Hinzufügen eines $R_\nu^{\pm 1}$ und durch identische Umformungen in das zeichenlose Wort verwandeln lassen. Dann gilt er auch für W, wenn W erst durch $m + 1$ derartige Hinzufügungen und Fortlassungen zu eins gemacht werden kann. Dies kann man so einsehen: W läßt sich jedenfalls durch einmaliges Hinzufügen bzw. Fortlassen eines $R_\nu^{\pm 1}$ und identische Umformungen in ein Wort $\overline{W}$ verwandeln. Nach Voraussetzung besteht für $\overline{W}$ eine Identität:

$$\overline{W} \equiv \prod_{k=1}^{\bar{h}} T_k R_{\nu_k}^{e_k} T_k^{-1} \tag{2}$$

mit $e_k = \pm 1$, $\nu_k = 1, 2, \ldots n$. $\overline{W}$ läßt sich nun rückwärts durch Fortlassen bzw. Hinzufügen eines $R_\nu^{\pm 1}$ — nach vorangegangenen identischen Umformungen — wieder in ein mit W identisches Wort überführen. Das betreffende $R_\nu^{\pm 1}$ möge etwa R_1^{+1} sein. Wird W durch Hinzufügen von R_1 mit $\overline{W}$ identisch, so läßt sich W so in zwei Teile zerlegen, daß $W \equiv W_1 W_2$ und $\overline{W} \equiv W_1 R_1 W_2 \equiv W_1 W_2 W_2^{-1} R_1 W_2$ also, wegen (2): $\overline{W} \equiv \prod_{k=1}^{\bar{h}} T_k R_{\nu_k}^{e_k} T_k^{-1} \equiv W \cdot W_2^{-1} R_1 W_2$ und $W \equiv \left(\prod_{k=1}^{\bar{h}} T_k R_{\nu_k}^{e_k} T_k^{-1} \right) W_2^{-1} R_1^{-1} W_2$. Wird

W durch Fortlassen von R_1 mit $\overline{W}$ identisch, so gilt $W \equiv \overline{W}_1 R_1 \overline{W}_2$; $\overline{W} \equiv \overline{W}_1 \overline{W}_2$, also $W \equiv (\overline{W}_1 \overline{W}_2)\, \overline{W}_2^{-1} R_1 \overline{W}_2 \equiv \left(\prod_{k=1}^{\bar{h}} T_k R_{\nu k}^{e_k} T_k^{-1} \right) \overline{W}_2^{-1} R_1 \overline{W}_2$. In beiden Fällen hat man für W eine Darstellung vom Typus (N) gewonnen. Um ein Beispiel zu geben: $a^2 b a^{-2} b^{-1} \equiv W$ ist sicher gleich eins, wenn $ab = ba$ ist, also $aba^{-1}b^{-1} \equiv R$ gleich eins ist. In der Tat ist auch:

$$a^2 b a^{-2} b^{-1} \equiv [a\,(aba^{-1}b^{-1})\, a^{-1}]\, (aba^{-1}b^{-1}).$$

3. Weiterhin braucht man *Invarianten gegenüber identischen Umformungen.* Solche sind die „*Exponentensummen*", welche die Erzeugenden $a, b, c, \ldots$ in einem aus ihnen gebildeten Wort $W(a, b, c, \ldots)$ besitzen; damit ist folgendes gemeint:

Es ist doch sicher $W \equiv a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \cdots a^{\alpha_2} b^{\beta_2} c^{\gamma_2} \cdots a^{\alpha_n} \cdots$, wobei einzelne der $\alpha, \beta, \ldots$ auch Null sein dürfen. Dann heißt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ die Exponentensumme von a in W usf. Die Invarianz folgt zum Beispiel daraus, daß Hinzufügen und Fortlassen von $aa^{-1}, \ldots$ die Exponentensumme von $a, \ldots$ nicht ändert, oder auch aus der Bemerkung, daß, wenn $W \equiv W'$ ist, $WW'^{-1} \equiv 1$ in allen Erzeugenden die Exponentensumme Null haben muß auf Grund der folgenden, (verallgemeinerungsfähigen) Schlußweise: WW'^{-1} läßt sich sicher erst recht in eins verwandeln, wenn man Vertauschung der Zeichen erlaubt, also $aba^{-1}b^{-1} = 1$ setzt usf. Dann wird aber $WW'^{-1} = a^{\bar{\alpha}} b^{\bar{\beta}} c^{\bar{\gamma}} \cdots$ wobei $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \ldots$ resp. die Exponentensummen von $a, b, \ldots$ in WW'^{-1} sind. Wegen $WW'^{-1} = 1$ folgt $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \cdots = 0$. Mit Rücksicht auf diese zweite Betrachtungsweise sollen Schlüsse, die auf der Invarianz der Exponentensummen bei identischen Umformungen beruhen, weiterhin als Schlüsse „durch Abelschmachen" bezeichnet werden.

Die Exponentensummen der Erzeugenden, aus denen ein Wort besteht, sagen sehr wenig über dieses Wort aus, da es unendlich viele Worte aus zwei oder mehr Erzeugenden gibt, die, ohne identisch eins zu sein, in allen Erzeugenden die Exponentensummen Null besitzen. Hier greift ein Hilfssatz ein, welcher es gestattet, über die Verteilung gerade *der* Erzeugenden, welche in einem Worte die Exponentensumme Null haben, durch „Abelschmachen" etwas zu erfahren.

4. *Transformierte als neue Erzeugende. Unabhängigkeit derselben.* Sind nämlich W_1 und W_2 Worte aus den Erzeugenden $a_1, \ldots, a_n$ und b, und ist $W_1(a_1, \ldots, a_n, b) \equiv W_2(a_1, \ldots, a_n, b)$ und hat b in W_1 (und also auch in W_2) die Exponentensumme Null, so lassen sich W_1 und W_2 als Worte in den mit Potenzen von b transformierten $a_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ schreiben, d. h. als Worte in den $b^k a_\nu b^{-k} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Diese mögen als $a_\nu^{(k)}$ bezeichnet werden. Es sei etwa:

$$W_1(a_1, \ldots, a_n, b) = F_1(\ldots a_\nu^{(k)} \ldots);$$
$$W_2(a_1, \ldots, a_n, b) = F_2(\ldots a_\nu^{(k)} \ldots).$$

Der Hilfssatz sagt dann aus, daß $F_1 \equiv F_2$ identisch in den $a_\nu^{(k)}$ ist; durch Abelschmachen in den $a_\nu^{(k)}$ erhält man schärfere Aussagen als durch Abelschmachen in $a_1, \ldots, a_n; b$.

Beim *Beweise* genügt es, zu zeigen, daß ein Wort $W(a_1, \ldots, a_n, b)$, welches in $a_1, \ldots, a_n, b$ identisch eins ist, auch in den $a_\nu^{(k)}$ identisch eins ist. Der Beweis soll hier nur für den Fall durchgeführt werden, daß in W außer b nur noch eine einzige Erzeugende a auftritt; der allgemeine Fall ist dann durch vollständige Induktion und Anwendung der in diesem einfachsten Falle verwendeten Schlußweise leicht zu erledigen.

Es sei also $W(a, b) \equiv 1$, und:

$$W \equiv \prod_{i=1}^{h} b^{k_i} a^{e_i} b^{-k_i} \text{ mit } e_i = \pm 1$$

und $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Damit $W \equiv 1$ ist, müssen sich mindestens einmal zwischen zwei a-Zeichen mit entgegengesetzt gleichem Exponenten die b-Zeichen fortheben; das heißt, es muß mindestens für *einen* Wert i_0 von i $k_{i_0} = k_{i_0+1}$ und $e_{i_0} = -e_{i_0+1}$ sein. Damit kann man aber sogleich $b^{k_{i_0}} a^{e_{i_0}} b^{-k_{i_0}}$ gegen $b^{k_{i_0}+1} a^{e_{i_0}+1} b^{-k_{i_0}+1}$ fortheben, das heißt: man kann *alle* Absorptionen auch identisch in den $a^{(k)}$ $(a^{(k)} = b^k a b^{-k})$ ausführen, da $b^{k_{i_0}} a^{e_{i_0}} b^{-k_{i_0}} = [a^{(k_{i_0})}]^{e_{i_0}}$ und $b^{k_{i_0}+1} a^{e_{i_0}+1} b^{-k_{i_0}+1} = [a^{(k_{i_0})}]^{-e_{i_0}}$ ist.

§ 3. Reduktion des Beweises des Freiheitssatzes auf zwei Hilfssätze.

1. *Fallunterscheidung.* Beim Beweise des Freiheitssatzes sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(I) Aus $R(a; x) = 1$ folgt eine nicht identisch erfüllte Relation für a, also $a^n = 1$, $n \neq 0$.

(II) Aus $R(a_1, \ldots, a_n; x) = 1$ folgt eine nicht identisch erfüllte Relation für $a_1, \ldots, a_n$: $W(a_1, \ldots, a_n) = 1$, und es kommen in R mindestens zwei verschiedene a wirklich vor.

Vorbemerkung: Es könnte scheinen, als ob diese Fallunterscheidung keine vollständige Disjunktion wäre, da es möglicherweise so sein könnte, daß aus $R(a_1, x) = 1$ zwar keine Relation für a_1 allein folgt, wohl aber eine solche zwischen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Mit den Methoden des folgenden Paragraphen läßt sich aber beweisen:

Folgt aus $R(a_1, x) = 1$ eine Relation zwischen $a_1, \ldots, a_n$ (welche nicht identisch erfüllt ist), so folgt auch schon eine solche für a_1 allein.

2. *Der Fall* I: Folgt aus $R(a, x) = 1$ $a^n = 1$, so besteht nach § 2 eine Identität:

$$a^n \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i(a, x)\, R^{e_i}\, T_i^{-1} \tag{1}$$

mit $e_i = \pm 1$. Hieraus folgt, daß x in R die Exponentensumme Null hat, während a in R eine von Null verschiedene Exponentensumme besitzt [2]).

Man setze für alle ganzzahligen k: $x^k a x^{-k} = b_k$, also insbesondere $a = b_0$, und schreibe dann beide Seiten von (1) in den b_k. Die linke Seite wird zu b_0^n. Die rechte Seite verwandelt sich folgendermaßen: Es gehe $R(a, x)$ in ein Wort $P(\ldots b_l \ldots)$ in den b_k über. Der Index l nimmt — im allgemeinen — innerhalb P verschiedene Werte an. t_i sei die Exponentensumme von x in T_i.

Dann ist: $T_i = \overline{T}_i(\ldots b_m \ldots) \cdot x^{t_i}$ also $T_i R T_i^{-1} = \overline{T}_i(\ldots b_m \ldots)\, x^{t_i} P(\ldots b_l \ldots)\, x^{-t_i}\, \overline{T}^{-1}$. Indem man jedes der b_l in P mit x^{t_i} transformiert und die Definition der b_l berücksichtigt, erhält man schließlich:

$$b_0^n \equiv \prod_{i=1}^{h} \overline{T}_i P^{e_i}(\ldots b_{l+t_i} \ldots)\, \overline{T}_i^{-1}, \tag{2}$$

und dies ist jetzt nach § 2 eine Identität in den b_k. Daher gilt: Es folgt die Relation $b_0^n = 1$ aus endlich vielen der Relationen

$$P(\ldots b_{l+t} \ldots) = 1; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

ausführlich geschrieben:

---

[2]) Durch Abelschmachen folgt nämlich, wenn man $\sum_{i=1}^{h} e_i = \varrho$ setzt, und α bzw. ξ die Exponentensummen von a bzw. x in R sind:

$$\begin{matrix} n = \varrho \cdot \alpha, \\ 0 = \varrho \cdot \xi, \end{matrix} \quad \text{also: } \varrho \neq 0,\ \alpha \neq 0,\ \xi = 0.$$

$$(3)\qquad \begin{cases} P(\ldots b_l \ldots) = 1 \\ P(\ldots b_{l+1} \ldots) = 1, \quad P(\ldots b_{l-1} \ldots) = 1 \\ P(\ldots b_{l+2} \ldots) = 1, \quad P(\ldots b_{l-2} \ldots) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Damit ist das Problem scheinbar viel komplizierter geworden.

Es soll nämlich jetzt die Relation $b_0^n = 1$ aus unbeschränkt vielen Relationen zwischen unbeschränkt vielen Erzeugenden folgen. Aber erstens verteilen sich diese Erzeugenden in einer sehr speziellen Weise über die Relationen, zweitens sind diese Relationen isomorph: Sie gehen auseinander hervor, indem man b_l durch b_{l+t} ersetzt, wobei t eine ganze (für jede Relation feste) Zahl ist, und drittens ist die Zahl der Zeichen (= Buchstaben) von P geringer als die Zeichen-(= Buchstaben-)Zahl von R, und zwar genau um die Zahl der x-Zeichen in R.

Die hier vorgenommene Umformung der Fragestellung ist der entscheidende Schritt beim Beweise des Freiheitssatzes. Bevor man weitergeht, muß man eine analoge Umformung auch im Falle II vornehmen.

3. *Fall* II. Wenn aus $R(a_1, \ldots, a_n, x) = 1$ $W(a_1, \ldots, a_n) = 1$ folgen soll, und in R zwei verschiedene a vorkommen, kann man nicht mehr, wie unter (I), schließen, daß x in R die Exponentensumme Null hat, denn es können die Exponentensummen der a_ν in W alle Null sein. *Wohl aber darf man stets annehmen, daß a_1 in R die Exponentensumme Null hat.* Nämlich: Entweder hat ein in R wirklich vorkommendes a_ν die Exponentensumme Null. Dann nenne man dieses a_1, (und verfahre mit a_1 genau so, wie dies später mit b_1 (s. unten) geschieht). Oder es haben a_1 bzw. a_2 in R die von Null verschiedenen Exponentensummen s_1 bzw. s_2. Dann setze man $a_1 = b_1^{+s_2}$ und $a_2 = b_1^{-s_1} b_2$. R und W gehen hierdurch in Worte $\overline{R}(b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n, x)$ bzw. $\overline{W}(b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n)$ über, *wobei b_1 in $\overline{R}$ die Exponentensumme Null hat.* Die Identität in $a_1, \ldots, a_n, x$:

$$(4)\qquad W \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i R^{e_i} T_i^{-1} \qquad (e_i = \pm 1),$$

welche besagt, daß R Wurzel von W ist, geht in die Identität in $b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n, x$ über:

$$(4')\qquad \overline{W} \equiv \prod_{i=1}^{h} \overline{T}_i \overline{R}^{e_i} \overline{T}_i^{-1},$$

wobei die $\overline{T}_i$ aus den T_i hervorgehen, indem man für a_1 und a_2 b_1 und b_2 einführt. (4′) besagt, daß $\overline{R}$ Wurzel von $\overline{W}$ ist. Man hat sich nun zu vergewissern, daß durch den Übergang von den a zu den b „nichts verloren geht“ [3]), das heißt, man muß zeigen: Wenn man beweisen kann, daß auf Grund von (4′) $\overline{R}$, zyklisch geschrieben, das x nicht mehr enthält, dann enthält auch R, zyklisch geschrieben, das x nicht mehr. Dies wird geleistet durch die Bemerkung: Ist irgendein Wort $V(a_1, \ldots, a_n, x)$ gegeben, in welchem zwischen $a_1, \ldots, a_n, x$ keine Absorptionen stattfinden können (das heißt, man kann nirgends $a_1 a_1^{-1}, \ldots$ oder $x^{-1} x$ fortlassen), und macht man die Substitution:

$$(5)\qquad a_1 = b_1^{+s_2}, \quad a_2 = b_1^{-s_1} b_2, \quad s_2 \neq 0,$$

so geht V in ein Wort $V(b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n, x)$ über, in welchem zwar eventuell Absorptionen zwischen b_1-Zeichen stattfinden können, aber (auch nach Ausführung von Absorptionen zwischen b_1-Zeichen) sicher keine Absorptionen zwischen $b_2, a_3, \ldots, a_n, x$-Zeichen. (Ist also insbesondere V nicht identisch eins, so ist es auch $\overline{V}$ nicht). Der Beweis ist trivial.

---

[3]) Man kann nämlich im allgemeinen b_1 und b_2 nicht rückwärts wieder durch a_1 und a_2 ausdrücken.

b_1 hat in $\overline{R}$ die Exponentensumme Null, also — wegen (4′) — auch in $\overline{W}$. Man transformiere mit b_1 rechts und links in (4′), und setze für alle ganze Zahlen k:

$$c_{\nu,k} = \begin{cases} b_1^k b_2 b_1^{-k} & \text{für } \nu = 2, \\ b_1^k a_\nu b_1^{-k} & \text{für } \nu = 3, \ldots, n, \end{cases}$$

und ferner: $x_k = b_1^k x b_1^{-k}$. $\overline{W}$ geht dann in ein Wort $F(\ldots c_{\nu,k} \ldots)$ über, und $\overline{R}$ in ein solches $P(\ldots c_{\nu,l} \ldots ; \ldots x_m \ldots)$, wobei l, m innerhalb P verschiedene Werte annehmen können. Wichtig ist nun, daß P nicht nur weniger Zeichen (= Buchstaben, *nicht* ursprüngliche Erzeugende) als $\overline{R}$, sondern auch weniger Zeichen als R enthält. In der Tat ist zwar durch die Substitution (5) vielleicht die Zahl der b_1-Zeichen in $\overline{R}$ größer als die Zahl der a_1-Zeichen in R geworden, aber die Zahl der $b_2, a_3, \ldots, a_n, x$-Zeichen in $\overline{R}$ ist gleich der entsprechenden Anzahl der $a_2, a_3, \ldots, a_n, x$-Zeichen in R, und das b_1 verschwindet bei der Transformation mit b_1. Für den Fall, daß von vornherein a_1 in R die Exponentensumme Null hat, transformiere man mit diesem, setze $a_1^k a_\nu a_1^{-k} = c_{\nu,k}$ für $\nu = 2, 3, \ldots, n$ und für alle ganzzahligen k, ferner $a_1^k x a_1^{-k} = x_k$, transformiere in (4) mit a_1 usf. Man findet dann, genau wie im Falle I, daß

$F(\ldots c_{\nu,k} \ldots) = 1$ aus dem Relationensystem

$$P(\ldots c_{\nu,l+t} \ldots ; \ \ldots x_{m+t} \ldots) = 1 \quad (t = 0, \pm 1 \ldots) \tag{6}$$

folgt. (ν, l, m sind innerhalb P variabel). Und zwar folgt $F = 1$ aus endlich vielen Relationen des unendlichen Systemes (6).

4. *Beweisplan.* Der Beweis des Freiheitssatzes soll jetzt folgendermaßen geleitet werden: Drei Hilfssätze werden uns in den Stand setzen, zu zeigen: Folgt aus einem System (3) (im Falle I) $b_0^n = 1$, so läßt sich schon aus einer einzigen Relation (3) eine in derselben wirklich vorkommende Erzeugende „eliminieren" (vgl. § 1), und analog wird im Falle II gezeigt werden: Weil aus (6) eine Relation folgt (nämlich $F = 1$) welche die x nicht mehr enthält, muß sich schon aus einer einzigen Relation (6) ein x eliminieren lassen. Sodann wird vollständige Induktion angewandt: Der Freiheitssatz ist trivial richtig für den Fall, daß R nur eine einzige Erzeugende enthält, — insbesondere also dann, wenn R nur aus einem Zeichen besteht —, da es dann x nicht enthalten kann [4]). Man nehme den Satz als bewiesen an für alle Worte, die aus weniger Zeichen bestehen als R. Ferner nehme man an, daß R, zyklisch geschrieben, keine Absorptionen zuläßt. Dann läßt auch keines der P in (3) bzw. (6) solche Absorptionen zu.

Andererseits gilt für die P in (3) und (6) der Freiheitssatz, welcher aussagt: Läßt sich aus einem P eine Erzeugende eliminieren, so enthält es, zyklisch geschrieben, dieselbe nicht mehr. (Jedes P enthält nämlich weniger Zeichen als R.) Damit ist man fertig.

5. *Formulierung dreier Hilfssätze. Reduktion des dritten auf die beiden ersten.* Es sind jetzt die oben (s. Nr. 4) erwähnten Hilfssätze zu formulieren, anzuwenden und zu beweisen. Der Beweis soll im folgenden Paragraphen geführt werden. Bei der Formulierung soll keine Rücksicht auf die bisher gebrauchten Bezeichnungen genommen werden.

---

[4]) *Beweis*: Ist $\prod_{i=1}^{h} T_i (x^m)^{e_i} T_i^{-1} \equiv W(a_1, \ldots, a_n)$, wobei $e_i = \pm 1$, $m \neq 0$ ist, so mache man von der Bemerkung Gebrauch, daß eine Identität richtig bleibt, wenn man in ihr konsequent eine Erzeugende durch eine andere (die eventuell auch sonst vorkommen darf) oder durch 1 ersetzt, und ersetze in der obenstehenden Identität x durch eins. Das liefert $W \equiv 1$.

Hilfssatz 1. *Gegeben sind vier Systeme von Erzeugenden:*

$$a_1, \ldots, a_m; \quad b_1, \ldots, b_n; \quad x_1, \ldots, x_r; \quad y_1, \ldots, y_s$$

und zwei Systeme von (endlich vielen) Relationen zwischen diesen:

$$\text{(A)} \qquad \{P_\mu(a_1, \ldots; \quad b_1, \ldots; \quad x_1, \ldots) = 1\} \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

$$\text{(B)} \qquad \{Q_\nu(b_1, \ldots; \quad x_1, \ldots; \quad y_1, \ldots) = 1\} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Dann wird behauptet:

Folgt weder aus (A) *allein noch aus* (B) *allein eine Relation für die a und b allein, und folgt weder aus* (A) *allein noch aus* (B) *allein eine Relation zwischen den b und x allein — dann folgt aus* (A) *und* (B) *zusammengenommen keine Relation zwischen den a und b allein.*

Hilfssatz 2. *Gegeben sind drei Systeme von Erzeugenden:*

$$a_1, \ldots, a_m; \quad x_1, \ldots, x_r; \quad y_1, \ldots, y_s.$$

und zwei Systeme von (endlich vielen) Relationen:

$$\text{(}\overline{\text{A}}\text{)} \qquad \{\overline{P}_\mu(a_1, \ldots; x_1, \ldots) = 1\} \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

$$\text{(}\overline{\text{B}}\text{)} \qquad \{\overline{Q}_\nu(a_1, \ldots; y_1, \ldots) = 1\} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Folgt dann weder aus ($\overline{\text{A}}$) *noch aus* ($\overline{\text{B}}$) *allein eine Relation zwischen* $a_1, \ldots, a_m$, *dann folgt auch aus* ($\overline{\text{A}}$) *und* ($\overline{\text{B}}$) *zusammen keine solche Relation.*

Anwendung der Hilfssätze. Vorbemerkung: Hilfssatz 2 ist unabhängig von Hilfssatz 1; Hilfssatz 1 wird dazu dienen, das noch fehlende Stück des Beweises des Freiheitssatzes, d. h. den Beweis der oben (s. Nr. 4.) über die Relationensysteme (3) bzw. (6) gemachten Behauptung auf den Beweis des folgenden Hilfssatzes zurückzuführen:

Hilfssatz 3. *Gegeben seien zwei Systeme von Erzeugenden:* $d_1, d_2, \ldots, d_t$ *und* $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_H$, *und ein System von* $H - K + 1$ $(K > 0)$ *Relationen zwischen diesen von folgender Beschaffenheit:*

Keine Relation läßt, zyklisch geschrieben, Absorptionen zu.

Sind $Q_0 = 1, \; Q_1 = 1, \ldots, Q_{H-K} = 1$ *die* $H - K + 1$ *Relationen, so enthält für*

$$0 \leqq \nu \leqq H - K \text{ das Wort } Q_\nu(d_1, \ldots; \; p_\nu, \; p_{\nu+1}, \ldots, p_{\nu+K})$$

außer irgendwelchen d (eventuell überhaupt keinem d) höchstens die Erzeugenden p_ν *bis* $p_{\nu+K}$, *und zwar so, daß* p_ν *und* $p_{\nu+K}$ *in* Q_ν *wirklich vorkommen.*

Das Relationensystem

$$\text{(q)} \begin{cases} Q_0(d_1, \ldots; p_0, \ldots, p_K) = 1 \\ \quad Q_1(d_1, \ldots; p_1, \ldots, p_{K+1}) = 1 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad Q_{H-K}(d_1, \ldots; p_{H-K}, \ldots, p_H) = 1 \end{cases}$$

besitzt also ganz ähnliche Eigenschaften wie ein endliches Teilsystem von (3) (falls in (q) keine *d* auftreten) *oder von* (6).

Behauptet wird: Folgt aus dem Relationensystem (q) *eine Relation für* $d_1, \ldots$ *und* $p_0, p_1, \ldots, p_S$ *mit* $0 \leqq S < K$, *dann muß sich notwendig aus einer der Relationen* (q), *etwa aus* $Q_\nu = 1$ *eine der Erzeugenden* p_ν *oder* $p_{\nu+K}$ *eliminiren lassen* [5]). Der Beweis hierfür wird unter Anwendung von Hilfssatz 1 etwa so geliefert:

Der Hilfssatz 3 ist trivial richtig für den Fall, daß $H - K = 0$ ist, also (q) nur aus einer einzigen Relation besteht. Er sei bewiesen für alle Relationensysteme (q),

---

[5]) Ein Relationensystem, für welches alle Voraussetzungen, die hier über das System (q) gemacht wurden, erfüllt sind, soll im Folgenden „*ein System vom Typus* (q)" heißen.

die aus weniger als $H - K + 1$ Relationen bestehen. Dann gilt er auch für das vorgelegte Relationensystem (q).

Beweis: Es mögen zwei Fälle unterschieden werden: Erstens: Es sei $H - K \leqq S$. Man wende Hilfssatz 1 an, indem man identifiziert: die Erzeugenden $b_1, \ldots$ von Hilfssatz 1 mit $d_1, \ldots, d_t$ und $p_1, \ldots, p_S$; die Erzeugenden $a_1, \ldots$ mit p_0; die Erzeugenden $x_1, \ldots$ mit $p_{S+1}, \ldots, p_k$; die Erzeugenden $y_1, \ldots$ mit $p_{K+1}, \ldots, p_{H-K}$; das Relationensystem (B) mit $Q_1 = 1, Q_2 = 1, \ldots, Q_{H-K} = 1$; und schließlich das Relationensystem (A) mit $Q_0 = 1$. Man kann sich diese Einteilung an dem folgenden Schema veranschaulichen[6]):

$$\begin{array}{c|l}
 & \quad a \quad\quad b \quad\quad\quad\quad x \quad\quad y \\
\hline
\text{(A)} & Q_0(p_0, d_1, \ldots, p_1, \ldots\ldots, p_S, \ldots, p_K) = 1 \\
 & Q_1(p_1, d_1, \ldots, p_2, \ldots, p_S, \ldots\ldots, p_{K+1}) = 1 \\
\text{(B)} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & Q_{H-K}(p_{H-K}, d_1, \ldots, p_S, \ldots\ldots\ldots, p_H) = 1.
\end{array}$$

Nach Hilfssatz 1 läßt sich entweder p_0 aus Q_0 eliminieren, oder es lassen sich $p_{S+1}, \ldots, p_K$ aus Q_0 eliminieren, oder es lassen sich $p_{K+1}, \ldots, p_H$ aus $Q_1, \ldots, Q_{H-K}$ eliminieren.

Wenn die beiden ersten Fälle nicht eintreten können, wenn also aus $Q_1 = \cdots = Q_{H-K} = 1$ eine Relation für $p_1, \ldots, p_K, d_1, \ldots$ alleine folgt, benutze man die durch die Anwendung der vollständigen Induktion gegebene Voraussetzung, indem man beachtet, daß das Relationensystem $Q_1 = 1, \ldots, Q_{H-K} = 1$ ein solches vom Typus (q) mit weniger als $H - K + 1$ Relationen ist. Damit ist der Fall $H - K \leqq S$ erledigt, und es bleibt $H - K > S$. Man wende Hilfssatz 1 an, indem man identifiziert:

$$\begin{array}{rcl}
\text{in Hilfssatz 1} & \text{mit} & \text{in Hilfssatz 3} \\
a_1, \ldots & ,, & p_0, \ldots, p_S \\
b_1, \ldots & ,, & d_1, \ldots \\
x_1, \ldots & ,, & p_{S+1}, \ldots, p_{S+K} \\
y_1, \ldots & ,, & p_{S+K+1}, \ldots, p_H \\
\text{das System (A)} & ,, & Q_0 = 1, \ldots, Q_S = 1 \\
\text{das System (B)} & ,, & Q_{S+1} = 1, \ldots, Q_{H-K} = 1.
\end{array}$$

Dann gilt: Entweder folgt aus $Q_0 = \cdots = Q_S = 1$ eine Relation für $p_0, \ldots, p_S, d_1, \ldots$ oder eine solche für $d_1, \ldots, p_{S+1}, \ldots, p_{S+K}$, oder es folgt aus $Q_{S+1} = \cdots = Q_{H-K} = 1$ eine Relation für $d_1, \ldots, p_{S+1}, \ldots, p_{S+K}$. In all' diesen Fällen besitzen die Relationensysteme $Q_0 = 1, \ldots, Q_S = 1$ bzw. $Q_{S+1} = 1, \ldots, Q_{H-K} = 1$ „den Typus (q)"[7]) und bestehen aus weniger als $H - K + 1$ Relationen, das heißt, man kann den Schluß der vollständigen Induktion anwenden. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

6. *Beweis des Freiheitssatzes*: Angewendet wird Hilfssatz 3, indem man zeigt: Weil aus einem endlichen Teilsystem von (3) bzw. (6) $b_0^n = 1$ bzw. $F(\ldots c_{\nu,k} \ldots) = 1$ folgt, besitzt ein (im allgemeinen von diesem verschiedenes) endliches Teilsystem von (3) bzw. (6) den Typus (q); wegen Hilfssatz 3 muß sich also aus einer einzigen Relation des Systemes (3) bzw. (6) eine in derselben wirklich vorkommende Erzeugende eliminieren lassen, und gerade das ist zu zeigen. Um zunächst Fall I zu erledigen, schreibe man sich das endliche Teilsystem von (3), aus welchem $b_0^n = 1$ folgt, in folgender Anordnung hin:

---

[6]) wobei die Erzeugenden in den Q gegenüber (q) zum Teil vertauscht sind.

[7]) Siehe Anmerkung 5.

Es sei $M \geqq 0$, $N \geqq 0$, $L \geqq 0$,

$$(\overline{3}) \qquad \left.\begin{array}{l} P_0 \equiv P(b_{-N}, b_{-N+1}, \ldots, b_{-N+L}) = 1 \\ P_1 \equiv P(b_{-N+1}, \ldots\ldots, b_{-N+L+1}) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{M-L+N} \equiv P(b_{M-L}, \ldots\ldots, b_M) = 1 \end{array}\right\} \text{hieraus folgt } b_0^n \equiv 1.$$

Es ist dabei sicher $-N < M$ und $L > 0$, sonst kommt x in R nicht vor. Ferner darf man $M - L \geqq 0$ annehmen, denn wenn aus einem System $(\overline{3})$ mit einem großen Wert von M nicht $b_0^n = 1$ folgt, gilt dies erst recht für kleinere Werte von M. Es brauchen in P_0 nicht $a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots, a_{-N+L}$ sämtlich vorzukommen, aber man darf voraussetzen, daß a_{-N} und a_{-N+L} wirklich vorkommen; allgemein kommt dann in P_r a_{-N+r} und a_{-N+L+r} wirklich vor.

Mindestens eine der Zahlen $-N$ und M ist von Null verschieden. Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß dies M ist. Wäre nun $N = 0$, so wäre das System $(\overline{3})$ ein solches vom Typus (q), so daß man sofort Hilfssatz 3 anwenden könnte [8]). Man kann aber nicht voraussetzen, daß $N = 0$ ist, und so mache man von Hilfssatz 2 Gebrauch, indem man identifiziert:

in Hilfssatz 2	mit	im vorliegenden Falle
$a_1, \ldots$	„	$b_0, \ldots, b_{L-1}$
$x_1, \ldots$	„	$b_L, \ldots, b_M$
$y_1, \ldots$	„	$b_{-N}, \ldots, b_{-1}$
das System $(\overline{A})$	„	$P_N = 1, \ldots, P_{M-L+N} = 1$
das System $(\overline{B})$	„	$P_0 = 1, \ldots, P_{N-1} = 1$.

Folgt nämlich aus $(\overline{3})$ eine Relation für b_0 alleine, so folgt erst recht eine solche für $b_0, \ldots, b_{L-1}$; Hilfssatz 2 sagt nun aus, daß dazu entweder aus

$$P_0 = 1, \ldots, P_{N-1} = 1 \text{ oder aus } P_N = 1, \ldots, P_{M-L+N} = 1$$

eine Relation für $b_0, \ldots, b_{L-1}$ folgen muß.

Jetzt wende man Hilfssatz 3 an, indem man z. B. im ersten Falle identifiziert:

im Hilfssatz 3	mit	im vorliegenden Falle	
$p_0, \ldots, p_S$	„	$b_0, \ldots, b_{L-1}$	
$p_{S+1}, \ldots, p_K$	„	b_{-1}	
$p_{K+1}, \ldots, p_H$	„	$b_{-2}, \ldots, b_{-N}$	
und $Q_\nu = 1$	„	$P_{N-\nu-1} = 1$	$(\nu = 0, \ldots, N-1)$

und im übrigen den Spezialfall von Hilfssatz 3 zugrundelegt, in dem die $d_1, \ldots$ nicht auftreten. Man findet, daß aus einer einzigen Relation $P = 1$ sich eine in derselben

---

[8]) Folgt nämlich $b_0^n = 1$ aus $P(b_0, \ldots, b_L) = 1$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$P(b_{M-L}, \ldots, b_M) = 1$
so identifiziere man:

in Hilfssatz 3	mit	im vorliegenden Falle
$p_0, \ldots, p_S$	„	b_0
$p_{S+1}, \ldots, p_K$	„	$b_1, \ldots, b_L$
$p_{K+1}, \ldots, p_H$	„	$b_{L+1}, \ldots, b_M$
$Q_\nu = 1$	„	$P(b_\nu, \ldots, b_{\nu+L}) = 1$

und lege im übrigen *den* Spezialfall von Hilfssatz 3 zugrunde, in welchem keine der Relationen (q) eine Erzeugende $d_1, \ldots$ enthält (die $d_1, \ldots$ kommen überhaupt nicht vor).

wirklich vorkommende Erzeugende eliminieren läßt, und dasselbe gilt, wenn aus $P_N = 1$, $\ldots, P_{M-L+N} = 1$ eine Relation für $b_0, \ldots, b_{L-1}$ folgen soll, wie man genau wie oben zeigt. Der Fall II erledigt sich in ganz ähnlicher Weise. Man hat hier, wenn $N \leqq M$, $L \geqq 0$ ist:

$$(\bar{6}) \quad \left\{ \begin{array}{r} P_0 \equiv P(\ldots c_{\nu,l+N} \ldots;\quad x_{+N}, \ldots, x_{+N+L}) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{M-N} \equiv P(\ldots c_{\nu,l+M} \ldots;\quad x_M, \ldots, x_{M+L}) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{hieraus folgt} \\ F(\ldots c_{\nu,k} \ldots) = 1. \end{array}$$

Dabei kommen $x_{N+\nu}$ und $x_{N+L+\nu}$ in P_ν wirklich vor. Man will zeigen, daß schon aus einer einzigen Relation von $(\bar{6})$ sich ein in derselben enthaltenes x eliminieren lassen muß. Falls $N = M$ ist, $(\bar{6})$ also nur aus einer Relation besteht, ist dies trivial richtig. Ebenso kann man vorweg den Fall $L = 0$ erledigen; kommt nämlich in jeder Relation $(\bar{6})$ nur ein einziges x vor, so wende man Hilfssatz 2 in der folgenden Weise an: Es soll aus $(\bar{\bar{6}})$: $P(\ldots c_{\nu,l+N+t} \ldots; x_{N+t}) = 1$ $(t = 0, \ldots, M - N)$ eine Relation für die $c_{\nu,K}$ allein folgen. Man identifiziere:

in Hilfssatz 2	mit	im vorliegenden Falle
$a_1, \ldots$	„	$\ldots c_{\nu,K} \ldots$
$x_1, \ldots$	„	x_N
$y_1, \ldots$	„	$x_{N+1}, \ldots, x_M$

und erhält: Entweder läßt sich aus $P_0 = 1$ x_N eliminieren, oder aus $(\bar{\bar{6}}\,\mathrm{a})$: $P_1 = 1, \ldots,$ $P_{M-N} = 1$ folgt eine Relation für die $\ldots c_{\nu,K} \ldots$ allein. Das System $(\bar{\bar{6}}\,\mathrm{a})$ ist genau so gebaut, wie $(\bar{\bar{6}})$, enthält aber eine Relation weniger. Falls also $(\bar{\bar{6}}\,\mathrm{a})$ noch mehr als eine Relation enthalten sollte, kann man durch immer wiederholte Anwendung von Hilfssatz 2 beweisen, daß aus einer der Relationen $(\bar{\bar{6}})$ sich das in derselben vorkommende x eliminieren lassen muß.

Jetzt betrachte man den Fall, daß $L > 0$ ist. Soll aus $(\bar{6})$ eine Relation für die $\ldots c_{\nu,K} \ldots$ folgen, so muß erst recht eine solche für die $\ldots c_{\nu,K} \ldots$ und $x_N, x_{N+1}, \ldots,$ x_{N+L-1} folgen. Man wende Hilfssatz 3 an, indem man identifiziert:

in Hilfssatz 3	mit	im vorliegenden Falle
$d_1, d_2, \ldots$	„	$\ldots c_{\nu,K} \ldots$
$p_0, \ldots, p_S$	„	$x_N, \ldots, x_{N+L-1}$
$p_{S+1}, \ldots, p_K$	„	x_{N+L}
$p_{K+1}, \ldots, p_H$	„	$x_{N+L-1}, \ldots, x_M$
die Relation $Q_\nu = 1$	„	$P_{N+\nu} = 1$ $(\nu = 0, \ldots, M - N)$.

Man erhält als Konsequenz, daß auch in diesem Falle aus einer einzigen Relation $(\bar{6})$ sich ein in derselben vorkommendes x eliminieren lassen muß. Damit ist endlich der Beweis des Freiheitssatzes auf den Beweis der Hilfssätze 1 und 2 zurückgeführt.

§ 4. Der Beweis der beiden Hilfssätze.

1. **Hilfssatz 1.** Beim Beweise von Hilfssatz 1 sollen zunächst die vier Systeme von Erzeugenden — der Kürze der Ausdrucksweise zuliebe — nur durch je eine einzige Erzeugende repräsentiert werden. Der Gang des Beweises wird hiervon nicht berührt. Man hat also a, b, x, y und die Systeme:

(A) $\{P_\mu(a, b, x) = 1\}$ und (B) $\{Q_\nu(b, x, y) = 1\}$.

Folgt nun aus (A) und (B) eine Relation $R(a, b) = 1$ zwischen a und b alleine, so besteht eine Identität der Art:

$$(1) \qquad R(a, b) \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i K_i^{(\beta i)} T_i^{-1},$$

wobei β_i einen der Werte 1, 2 besitzt, und für $\beta_i = 1$ $K_i^{(1)}(a, b, x)$ ein Wort aus a, b, x ist, derart, daß $K_i^{(1)}(a, b, x) = 1$ ist auf Grund von (A), und ebenso ist für $\beta_i = 2$ $K_i^{(2)}$ ein Wort aus b, x, y, welches auf Grund von (B) gleich eins ist. Zum Beispiel könnte man für die $K_i^{(\beta i)}$ die $P_\mu^{\pm 1}$ und $Q_\nu^{\pm 1}$ wählen, doch hat jene allgemeinere Darstellung Vorteile. Zuvor jedoch einige Bezeichnungen:

In der rechten Seite von (1) heiße $F_i \equiv T_i K_i^{(\beta i)} T_i^{-1}$ der i-te „*Faktor*", T_i „*Transformierende*", $K_i^{(\beta i)}$ „*Kern*". Der „Kern" soll dabei definiert sein als das, was übrigbleibt, wenn man in dem zyklisch geschriebenen Faktor alle möglichen Absorptionen ausgeführt hat.

Man darf verlangen:

(I) *Kein Faktor läßt Absorptionen in sich zu.* Man kann dies nötigenfalls stets dadurch erreichen, daß man einen Kern durch einen andern ersetzt, welcher aus ihm durch zyklische Vertauschung seiner Zeichen hervorgeht.

(II) *In* (1) *rechts steht eine Darstellung von R, welche unter allen möglichen derartigen Darstellungen eine Minimalzahl von Faktoren besitzt.*

(III) *Unter allen nach* (II) *möglichen Darstellungen sei die rechte Seite von* (1) *so gewählt, daß in ihr eine Minimalzahl von a- und y-Zeichen auftritt.*

Aus den bei der Formulierung des Satzes (§ 3, Nr. 5) gemachten Voraussetzungen erhält man ferner:

Jeder Kern enthält entweder a- oder y-Zeichen, aber niemals beide. Und: Es treten Kerne mit y-Zeichen wirklich auf. Die a- bzw. y-Zeichen sollen „*charakteristische Zeichen*" des Kernes genannt werden.

Aus den Postulaten (I) bis (III) und den eben genannten Voraussetzungen soll jetzt ein Widerspruch hergeleitet werden. Zunächst einige kleine Hilfsbetrachtungen:

(α) Zwischen zwei benachbarten Faktoren mit y-haltigen Kernen können sich in den Transformierenden nicht die a-Zeichen herausheben, — sonst kann man die beiden Faktoren in einem einzigen vereinigen, also die Faktorenzahl entgegen (II) vermindern. Das Gleiche gilt natürlich für die y-Zeichen in den Transformierenden zwischen zwei Kernen, die a-Zeichen enthalten.

(β) Charakteristische Zeichen eines Kernes können niemals von einem Nachbarkern absorbiert werden — denn wenn beide Kerne dieselben charakteristischen Zeichen enthalten, kann man in diesem Falle wieder die Faktorenzahl vermindern.

(γ) Kein Faktor kann hinsichtlich seiner a- und y-Zeichen zu mehr als der Hälfte von der *Transformierenden* eines Nachbarfaktors absorbiert werden; (es tritt dieser Fall dann und nur dann ein, wenn mehr als die Hälfte der charakteristischen Zeichen des Kernes von der Transformierenden des Nachbarfaktors absorbiert wird), denn in diesem Falle kann man die Zahl der a- und y-Zeichen vermindern — entgegen (III) [9]). Jetzt

[9]) Es sei etwa $F_2 \equiv \varphi\,\overline{\varphi}$, wobei φ mehr als die Hälfte der charakteristischen Zeichen des Kernes $K_2^{(\beta_2)}$ enthält (also mehr als $\overline{\varphi}$), und es sei $F_1 \equiv T_1 K_1^{(\beta_1)} T_1^{-1} \equiv \varphi\tau_1 K_1^{(\beta_1)} \tau_1^{-1}\,\varphi^{-1}$ (wobei rechts keine Absorptionen stattfinden können). Dann ist:

$$F_1 F_2 \equiv T_1 K_1^{(\beta_1)} T_1^{-1} F_2 \equiv \varphi\,\tau_1 K_1^{(\beta_1)} \tau_1^{-1}\,\varphi^{-1}\,\varphi\,\overline{\varphi} \equiv \varphi\,\overline{\varphi}\,(\overline{\varphi}^{-1}\tau_1) K_1^{(\beta_1)} (\overline{\varphi}^{-1}\tau_1)^{-1} \equiv F_2\,\overline{T}_2 K_2^{(\beta_2)} \overline{T}_2^{-1},$$

wobei $\overline{T}_2$ weniger a- und y-Zeichen enthält als T_2.

schreibe man sich $R(a, b) \equiv F_1 F_2 \cdots F_h$ hin. Rechts müssen alle y-Zeichen fortfallen. Absorption kann zunächst nur eintreten, wo zwei Faktoren zusammenstoßen. Es darf offenbar nicht sein, daß nach Ausführung aller derartigen Absorptionen vom Kerne jedes Faktors noch charakteristische Zeichen stehen bleiben, da dann keine weiteren Absorptionen mehr ausführbar wären, und einige Faktoren y-Zeichen im Kerne enthalten, die dann nicht alle fortfallen könnten.

Andrerseits: Führt man an der Stelle, an der zwei Faktoren zusammenstoßen, Absorptionen so weit als möglich aus (ohne sich um andere Stellen zu kümmern), so erkennt man aus (β) und (γ), daß dabei von keinem Kern mehr als die Hälfte seiner charakteristischen Zeichen absorbiert werden kann, und daß, wenn von einem Faktor bei einem solchen Prozeß überhaupt charakteristische Zeichen des Kernes absorbiert werden, diese von der *Transformierenden* des Nachbarfaktors absorbiert werden müssen. Damit ist gezeigt:

Es gibt Faktoren, die hinsichtlich ihrer a- und y-Zeichen zu genau gleichen Teilen von den Transformierenden ihrer Nachbarfaktoren absorbiert werden. Solche Faktoren sollen „*vertauschbare*" heißen auf Grund folgender Tatsache:

Ist in $F_1 F_2 F_3$ der Faktor F_2 vertauschbar, so ist: $F_1 F_2 F_3 \equiv F_2 \overline{F}_1 F_3 \equiv F_1 \overline{F}_3 F_2$ wobei $\overline{F}_1$ und $\overline{F}_3$ Transformierte von F_1 bzw. F_3 sind, welche ebensoviele a- und y-Zeichen enthalten, wie F_1 bzw. F_3[10]). Es gilt: Ist ein Faktor vertauschbar, so sind es seine Nachbarfaktoren nicht[11]).

Jetzt hat man nur noch zu zeigen:

Man kann, ohne gegen die gemachten Voraussetzungen zu verstoßen, die rechte Seite von (1) so umformen, daß keine vertauschbaren Faktoren auftreten.

Zu diesem Zwecke verlange man von der Darstellung von R durch die rechte Seite von (1) noch, daß sie unter allen Darstellungen, die (I) bis (III) genügen, noch

(IV) eine *Minimalzahl vertauschbarer Faktoren* besitzt,

und wähle schließlich unter allen dann noch möglichen Darstellungen eine solche heraus, für welche

(V) *der erste Faktor, der vertauschbar ist, einen möglichst kleinen Index besitzt.*

Es sei dann F_r in $F_1 \cdots F_{r-2} F_{r-1} F_r F_{r+1} \cdots F_h$ der erste vertauschbare Faktor.

Man vertausche F_r mit F_{r-1} und erhält: $R \equiv F_1 \cdots F_{r-2} F_r \overline{F}_{r-1} F_{r+1} \cdots F_h$. ($\overline{F}_{r-1}$ ist eine Transformierte von F_{r-1}, die genau soviel a- und y-Zeichen besitzt). Entweder ist F_r jetzt wieder vertauschbar. Wäre dann nicht noch ein weiterer Faktor vertauschbar geworden, so wäre gegen (V) verstoßen Also muß, da sich sonst nichts geändert hat, und $\overline{F}_{r-1}$ nicht vertauschbar sein kann, F_{r+1} vertauschbar geworden sein[12]). Dasselbe muß aber der Fall sein, wenn F_r nicht mehr vertauschbar ist, da man sonst gegen (IV) verstoßen würde.

Also wird, wenn man F_{r+1} mit $\overline{F}_{r-1}$ vertauscht:

$$R \equiv F_1 \cdots F_{r-2} F_r F_{r+1} \overline{\overline{F}}_{r-1} F_{r+2} \cdots F_h.$$

Da F_{r+1} jetzt nicht mehr vertauschbar ist[13]) schließt man genau wie oben auf Existenz

[10]) Beweis wie der Beweis von (γ).

[11]) Es kann nicht sein, daß sowohl F_1 zur Hälfte von der Transformierenden von F_2 als auch F_2 zur Hälfte von der Transformierenden von F_1 hinsichtlich seiner a- und y-Zeichen absorbiert wird. Im ersten Falle muß nämlich die Transformierende von F_2 mehr Zeichen enthalten als die von F_1, da sie letztere völlig und überdies einen Teil des Kernes von F_1 absorbieren muß. Im zweiten Falle müßte die Transformierende von F_1 aus dem analogen Grunde mehr Zeichen enthalten als die von F_2.

[12]) F_{r+1} existiert also.

[13]) Weil in $F_1 \cdots F_{r-1} F_r F_{r+1} \cdots$ nach Voraussetzung F_r vertauschbar war.

und Vertauschbarkeit von F_{r+2}. h ist endlich. Daraus folgt ein Widerspruch und Nichtexistenz vertauschbarer Faktoren.

Hilfssatz 1 ist damit bewiesen. Der Beweis von Hilfssatz 2 wird mit denselben Methoden geführt und braucht deshalb nur angedeutet zu werden.

2. **Hilfssatz 2.** Es sollen wieder die auftretenden Systeme von Erzeugenden durch je eine einzige Erzeugende repräsentiert werden. Man hat also:

$$(\bar{A}) \qquad \{P_\mu(a, x) = 1\} \text{ und } (\bar{B}) \qquad \{Q_\nu(a, y) = 1\}.$$

Soll hieraus eine Relation für a, $R(a) = 1$, folgen (welche nicht identisch erfüllt ist), so besteht eine Identität:

$$(\bar{1}) \qquad R(a) \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i K_i^{(\beta_i)} T_i^{-1},$$

wobei $\beta_i = 1, 2$ ist und $K_i^{(1)}(a, x)$ bzw. $K_i^{(2)}(a, y)$ auf Grund von $(\bar{A})$ bzw. $(\bar{B})$ gleich eins ist. Man stellt an die Darstellung von R in $(\bar{1})$ rechts sukzessive die Anforderungen:

(I′) Kein Faktor darf Absorptionen in sich zulassen.

(II′) In $(\bar{1})$ rechts steht eine Minimalzahl von Faktoren.

(III′) In $(\bar{1})$ rechts steht eine Minimalzahl von x- und y-Zeichen.

Aus den bei der Formulierung gemachten Voraussetzungen folgt außerdem: Jeder Kern $K_i^{(\beta_i)}$ enthält, je nachdem $\beta_i = 1$ oder $= 2$ ist, x oder y Zeichen, aber nicht beide. Die x- bzw. y-Zeichen, die in einem Kerne auftreten, sollen charakteristische Zeichen des betreffenden Faktors heißen.

Es kann nach Voraussetzung in $(\bar{1})$ rechts Absorption nur dort eintreten, wo zwei Faktoren zusammenstoßen, und es darf nicht sein, daß nach Ausführung aller derartiger Absorptionen von jedem Kerne charakteristische Zeichen stehen bleiben, da dann in $(\bar{1})$ rechts nicht alle x- und y-Zeichen fortfallen könnten. Man schließt nun genau wie bei Hilfssatz 1 weiter; man hat nur überall, wo dort von a- und y-Zeichen die Rede ist, von x- und y-Zeichen zu sprechen.

§ 5. Erweiterungen von Hilfssatz 1. Verwandte Hilfssätze. (Unabhängigkeitssätze).

Die folgenden Sätze gehören inhaltlich zu Hilfssatz (1) und (2); *gebraucht* werden sie jedoch erst *im zweiten Teile.*

1. **Erweiterungen von Hilfssatz 1.** Repräsentieren wieder a, b, x, y vier Systeme von Erzeugenden, zwischen denen zwei Systeme von Relationen bestehen:

$$(A) \qquad \{P_\mu(a, b, x) = 1\} \quad \text{und} \quad (B) \qquad \{Q_\nu(b, x, y) = 1\}$$

und folgt aus (A) ein System von Relationen zwischen a und b, aber keine Relation für b allein, und folgt im übrigen weder aus (A) allein noch aus (B) allein eine Relation für b und x allein —, dann folgen alle Relationen für a und b allein, welche aus (A) und (B) folgen, schon aus (A) allein. Der Beweis hierfür ist schon in dem Beweis von Hilfssatz 1 enthalten [14]); denn in

$$(1) \qquad R(a, b) \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i K_i^{(\beta_i)} T_i^{-1}$$

($\beta_i = 1, 2$; $K_i^{(1)}(a, b, x) = 1$ auf Grund von (A) $K_i^{(2)}(b, x, y) = 1$ auf Grund von (B)) darf auf der rechten Seite kein Faktor y-Zeichen im Kerne enthalten, wenn die For-

[14]) Der eigentliche Grund hiervon ist folgender: Beim Beweise von Hilfssatz 1 zeigt man zunächst — unabhängig davon, ob aus (A) eine Relation für a und b (in der a wirklich vorkommen muß, da sie sonst eine solche für b und x wäre) folgt —, daß — unter Zugrundelegung der übrigen Voraussetzungen — aus (B) folgende Relationen entbehrlich sind. Da, n. V., aus (A) alleine $R = 1$ nicht folgte, war man fertig.

derungen (I) bis (V) erfüllt sein sollen (§ 4, Nr. 1); nach Voraussetzung enthalten aber alle $K_i^{(2)}$ y-Zeichen; es dürfen also $K_i^{(2)}$ überhaupt nicht vorkommen.

Ebenso wie die eben gegebene Erweiterung von Hilfssatz 1 läßt sich auch der folgende Satz mit denselben Mitteln wie Hilfssatz 1 beweisen:

2. **Hilfssatz 4.** *Gegeben sind vier Systeme von Erzeugenden, die wieder durch je eine einzige Erzeugende repräsentiert werden mögen. Man hat also a, b, x, y, und zwei Systeme von Relationen zwischen ihnen*

$$(A_1) \quad \{P_\mu(a, x, y) = 1\} \quad \textit{und} \quad (B_1) \quad \{Q_\nu(b, x) = 1\}.$$

Weder aus (A_1) *noch aus* (B_1) *alleine soll eine Relation für x alleine folgen. Alle Relationen zwischen a und x, die aus* (A_1) *folgen, sollen durch das (eventuell unendliche) Relationensystem* (C_1) $\{S_\varrho(a, x) = 1\}$ *definiert sein.*

Dann wird behauptet: Alle Relationen zwischen a und b, $R(a, b) = 1$, welche aus (A_1) *und* (B_1) *folgen, folgen schon aus* (C_1) *und* (B_1)

Beweis: Es besteht eine Identität:

$$(1_1) \qquad R(a, b) \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i K_i^{(\beta i)} T_i^{-1}; \quad \beta_i = 1, 2$$

wobei $K_i^{(1)}(a, x, y)$ gleich eins auf Grund von (A_1), und $K_i^{(2)}(b, x) = 1$ auf Grund von (B_1). Jedes $K_i^{(\beta i)}$ enthält, nach Voraussetzung, a- oder b-Zeichen — aber nicht beide — oder aber y-Zeichen und keine b-Zeichen. Die a- und y-Zeichen bzw. die b-Zeichen, die im Kerne $K_i^{(\beta i)}$ eines Faktors $T_i K_i^{(\beta i)} T_i^{-1}$ vorkommen, sollen charakteristische Zeichen des Kernes bzw. Faktors heißen. Genau wie bei Hilfssatz 1 stellt man nun an die rechte Seite von (1_1) sukzessive die folgenden Anforderungen:

(I′) Kein Faktor läßt Absorptionen in sich zu.

(II′) In (1_1) rechts stehen möglichst wenig Faktoren.

(III′) Unter allen Darstellungen von R mit einer Minimalzahl von Faktoren besitzt die rechte Seite von (1_1) eine Minimalzahl von a-, y- und b-Zeichen.

Nennt man einen Faktor vertauschbar, wenn er von den *Transformierenden* seiner Nachbarfaktoren je zur Hälfte hinsichtlich seiner a-, y-, und b-Zeichen absorbiert wird, so verlange man weiter:

(IV′) In (1_1) rechts steht eine Minimalzahl vertauschbarer Faktoren, und sodann:

(V′) Der erste vertauschbare Faktor besitze einen möglichst kleinen Index.

Man zeigt — wörtlich wie bei Hilfssatz 1 —: Absorption kann nur eintreten, wo zwei Faktoren zusammenstoßen. Führt man an einer solchen Stelle Absorptionen so weit als möglich aus, so kann dabei von keinem Faktor mehr als die Hälfte seiner a-, b-, und y-Zeichen absorbiert werden. Da es ferner keine vertauschbaren Faktoren gibt, so folgt: Führt man in (1_1) rechts alle möglichen Absorptionen aus, so bleiben trotzdem von jedem Faktor charakteristische Zeichen des Kernes stehen. Da jedenfalls dabei keine y-Zeichen sein können, so folgert man leicht: Die rechte Seite von (1_1) enthält, wenn sie (I′) bis (V′) genügt, keine y-Zeichen[15]). Insbesondere enthält also kein $K_i^{(\beta i)}$ derartige Zeichen, und da $R = 1$ aus $K_i^{(\beta i)} = 1$ folgt, ist Hilfssatz 4 bewiesen.

3. Der nachfolgende **Hilfssatz 5** braucht einige neue Überlegungen zum Beweise. Es seien drei Systeme von Erzeugenden — wieder durch je eine einzige Erzeugende repräsentiert — gegeben, etwa a, b, t, und zwei Systeme von Relationen zwischen diesen:

$$(\alpha) \qquad \{P_\mu(a, t) = 1\} \quad \text{und} \quad (\beta) \qquad \{Q_\nu(b, t) = 1\}.$$

[15]) *Beweis*: Nach dem Vorhergehenden müssen nämlich die y-Zeichen jedes Faktors von den Transformierenden der Nachbarfaktoren absorbiert werden; enthält also ein Faktor y-Zeichen, so gilt dies von allen Transformierenden aller anderen Faktoren. T_1 und T_h^{-1} können aber keine y-Zeichen enthalten, da diese sich nicht fortheben könnten.

Aus keinem dieser beiden Systeme allein soll eine Relation für t allein oder für a bzw. b alleine folgen. Aus beiden zusammen folge indes eine Relation $R(a, b) = 1$. Man hat die Identität:

$$(1_2) \qquad R(a, b) \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i K_i^{(\beta i)} T_i^{-1}$$

mit $\beta_i = 1, 2$ und $K_i^{(1)}(a, t) = 1$ auf Grund von (α), $K_i^{(2)}(b, t) = 1$ auf Grund von (β). Jedes $K_i^{(ti)}$ enthält, nach Voraussetzung, entweder a- oder b-Zeichen, aber nicht beide. Bezeichnet man die a- bzw b-Zeichen als *charakteristische Zeichen* von $K_i^{(1)}$ bzw $K_i^{(2)}$, so hat man auf Grund der schon oft gebrauchten Schlußweise vom Beweis des Hilfssatzes 1 zunächst:

(I) *Die rechte Seite von* (1_2) *ist bei geeigneter Wahl der Faktoren* $T_i K_i^{(\beta i)} T_i^{-1}$ *so beschaffen, daß auch nach Ausführung aller irgend möglichen Absorptionen von jedem Faktor charakteristische Zeichen des Kernes stehen bleiben.* Und weiter wird behauptet:

(II) Ist die rechte Seite von (1_2) so beschaffen, daß sie (I) genügt, dann entsteht mindestens einer der Ausdrücke $K_i^{(\beta i)}$ aus einem Wort $A(a)\Theta(t)$ bzw. $B(b)\Theta(t)$ durch Transformation (A, B, Θ sind bzw. Worte in a, b, t, welche nicht identisch 1 sind), oder, anders ausgedrückt: *Aus* (α) *oder* (β) *folgt eine Relation* $A^{-1}(a) = \Theta(t)$ *bzw.* $B^{-1}(b) = \Theta(t)$. Und schließlich folgt unmittelbar aus (I):

(III) *Gilt* (I), *so ist die Zahl der Kerne* $K_i^{(1)}$ *bzw.* $K_i^{(2)}$ *in* (1_2) *rechts kleiner oder gleich der Zahl der a- bzw. b-Zeichen in* $R(a, b)$, *wenn dieses so geschrieben ist, daß es keine Absorptionen in sich zuläßt.*

(III) wird gebraucht in einem Falle, in dem R nur aus je einem a- und b-Zeichen besteht (§ 7). Zu beweisen ist lediglich noch (II). Man mache das etwa so: Außer der Voraussetzung der Gültigkeit von (I) weiß man noch, daß nach Ausführung aller Absorptionen in (1_2) rechts dort keine t-Zeichen mehr auftreten dürfen, und man darf überdies die Voraussetzung machen, daß in (1_2) rechts die Faktorenzahl möglichst klein ist, da diese Voraussetzung ja dem Existenzbeweis einer (I) genügenden rechten Seite von (1_2) zugrunde liegt. Man definiert nun: Führt man an der Stelle, an der zwei Faktoren zusammenstoßen, Absorptionen so weit als möglich aus, (wobei beide Faktoren im Kerne t-Zeichen enthalten!), und bleibt darnach vom Kerne des zweiten Faktors nur ein Wort $A_1(a)\Theta(t)$ bzw. $B_1(A)\Theta_1(t)$ stehen (wobei $\Theta_1 \equiv 1$ sein darf, während dies für A_1 bzw B_1 wegen (I) nicht möglich ist), dann wird der zweite Faktor durch den ersten „*zerstörend absorbiert*". Man beweist nun: Wenn kein Kern eine Transformierte von einem Wort $A(a)\Theta(t)$ bzw. $B(b)\Theta(t)$ ist, und wenn der i-te Faktor vom $(i-1)$-ten nicht zerstörend absorbiert wird, dann wird auch der $(i+1)$-te Faktor vom i-ten nicht zerstörend absorbiert. Damit ist man fertig, denn der erste Faktor besitzt dann nach Voraussetzung keinen Kern der Form $A_1(a)\Theta(t)$ bzw. $B_1(b)\Theta_1(t)$, und da der letzte Faktor dann nicht zerstörend absorbiert werden kann, so müssen in diesem Falle t-Zeichen auf der rechten Seite von (1_2) auch nach Ausführung aller möglichen Absorptionen stehen bleiben, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Es seien also — um die eben aufgestellte Behauptung zu beweisen — F_{i-1}, F_i, F_{i+1} drei konsekutive Faktoren in (1_2) rechts. Der Kern von F_i enthalte etwa a. Führt man an der Grenze von F_{i-1} und F_i alle möglichen Absorptionen aus, so bleibt von F_i ein Stück S_i folgender Beschaffenheit stehen:

$$S_i \equiv A_0(a)\Theta_1(t)\, A_1(a)\, \Theta_2(t)\, A_2(a, t)\, T_i^{-1},$$

wobei T_i die Transformierende von F_i ist, $A_0\Theta_1 A_1\Theta_2 A_2$ zum Kern $K_i^{(\beta i)}$ gehört, und Θ_1 und A_1 nicht $\equiv 1$ sind. In $\Theta_1 A_1\Theta_2 A_2 T_i^{-1}\,(T_{i+1} K_{i+1}^{(\beta_{i+1})} T_{i+1}^{-1})$ müssen nun Θ_2 und

A_1 von T_{i+1} absorbiert werden[15a]), da $K_{i+1}^{(\beta_i+1)}$ keine charakteristischen Zeichen von $K_i^{(\beta_i)}$ absorbieren darf, weil man in diesem Falle die Faktorenzahl vermindern könnte. Wird Θ_1 auch völlig von T_{i+1} absorbiert, so ist man fertig[16]). Der Fall, daß Θ_1 ganz oder teilweise von $K_{i+1}^{(\beta_i+1)}$ absorbiert wird, erledigt sich so: Da $K_{i+1}^{(\beta_i+1)}$ keine Transformierte von $A\Theta$ bzw. $B\Theta$ sein soll, besitzt es die Form:

$$K_{i+1}^{(\beta_i+1)} \equiv \bar{\Theta}_1 C_1 \bar{\Theta}_2 C_2 H,$$

wobei $\bar{\Theta}_1$ und $\bar{\Theta}_2$ aus t, C_1 und C_2 aus a oder b (je nachdem ob $\beta_{i+1} = 1$ oder $= 2$) bestehen, während H (das eventuell $\equiv 1$ sein darf) aus t und a bzw. b besteht. $K_{i+1}^{(\beta_i+1)}$ muß mit t-Zeichen beginnen, da es sonst Θ_1 nicht absorbieren könnte. Aber selbst, wenn $\bar{\Theta}_1$ von Θ_1 völlig absorbiert wird, wird, wie man sieht, $K_{i+1}^{(\beta_i+1)}$ nicht zerstörend absorbiert.

Zweiter Teil: Anwendungen des Freiheitssatzes.

Obwohl der Freiheitssatz fast trivial erscheint, ist er doch ein außerordentlich kräftiges Hilfsmittel, wie aus den folgenden Paragraphen hervorgeht.

§ 6. Äquivalente Relationen. Primitive Elemente. Eine „Hauptform" des Freiheitsatzes.

1. *Vorbemerkung: Die „Hauptform".* Um den Freiheitssatz anzuwenden, ist es zunächst zweckmäßig, ihn in der folgenden, später ständig gebrauchten Form auszusprechen.

Gegeben sind Erzeugende: $b_0, b_1, \ldots, b_M$ und c, und ein System von Relationen zwischen ihnen:

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} S_0(c; b_0, \ldots, b_K) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{M-K}(c; b_{M-K}, \ldots, b_M) = 1 \end{array}\right\} K \leqq M,$$

wobei die S, zyklisch geschrieben, keine Absorptionen zulassen mögen, und allgemein S_i die Erzeugenden b_i und b_{i+K} wirklich enthält. Dann wird behauptet: Sind $O \leqq H \leqq L \leqq M$ ganze Zahlen, und folgt aus (1) eine Relation für c und $b_H, \ldots, b_L$ allein, dann folgt diese Relation schon aus *den* Relationen von (1), die nur c und $b_H, \ldots, b_L$ enthalten. Der Beweis hierfür wird so geliefert: Besteht das System (1) nur aus einer einzigen Relation, so ist die aufgestellte Behauptung der Freiheitssatz. Unter Anwendung des *erweiterten* Hilfssatz 1 (§ 5) und mittels vollständiger Induktion beweist man dann die aufgestellte Behauptung allgemein nach genau demselben Schema, nach dem man Hilfssatz 3 (§ 3) aus Hilfssatz 1 (§ 3) ableitet. Übrigens bleibt der Freiheitssatz in der eben aufgestellten Form auch gültig, wenn man überall statt von c von einem System von Erzeugenden: $c_1, c_2, \ldots$ spricht.

2. *Äquivalente Relationen.* Nun ist es leicht, folgenden Satz zu beweisen: *Sind* $R_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ *und* $R_2(a_1, \ldots, a_n) = 1$ *Relationen zwischen den Erzeugenden* $a_1, \ldots, a_n$, *derart, daß aus* $R_1 = 1$ $R_2 = 1$ *folgt und umgekehrt, so gilt:* R_1 *ist Transformierte von* R_2. Die Relationen $R_1 = 1$ und $R_2 = 1$ sollen äquivalent heißen.

Der Beweis des eben ausgesprochenen Satzes gestaltet sich unter Anwendung vollständiger Induktion so: Falls R_1 oder R_2 nur aus einer Erzeugenden bestehen, ist der Satz eine unmittelbare Konsequenz des Freiheitssatzes. Indem man ihn allgemein — etwas modifiziert — so ausspricht: R_1 und R_2 sind, zyklisch geschrieben, identisch,

---

[15a]) Θ_1 muß nämlich auch irgendwie absorbiert werden.

[16]) Wie aus der sogleich vorzuführenden Gestalt von $K_{i+1}^{(\beta_i+1)}$ hervorgeht.

schließt man weiter: Wenn der Satz für alle Paare äquivalenter Relationen $P_1 = 1$, $P_2 = 1$ gilt, welche so beschaffen sind, daß P_1 bzw. P_2 zyklisch geschrieben [17]) weniger Zeichen enthalten als R_1 bzw. R_2, zyklisch geschrieben [17]), dann gilt er auch für das Paar $R_1 = 1$, $R_2 = 1$.

Beweis: Es bestehen zwei Identitäten:

$$(2) \qquad R_1 \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i R_2^{e_i} T_i^{-1} \qquad (e_i = \pm 1)$$

$$(\bar{2}) \qquad R_2 \equiv \prod_{i=1}^{\bar{h}} \bar{T} R_1^{\bar{e}_i} \bar{T}_i^{-1} \qquad (\bar{e}_i = \pm 1).$$

Durch Abelschmachen folgt, daß R_1 und R_2 in allen Erzeugenden dieselben Exponentensummen besitzen. Wenn ferner R_1 und R_2, zyklisch geschrieben, keine Absorptionen in sich zulassen, enthält R_1 jede Erzeugende wirklich, die in R_2 enthalten ist und umgekehrt. (Freiheitssatz.) a_1 komme in R_1 und R_2 vor. Man darf annehmen, daß a_1 in R_1 (und also auch in R_2) die Exponentensumme Null hat. Denn: Kommt in R_1 nur a_1 vor, so ist man fertig (s. oben). Kommen in R_1 mehrere Erzeugende vor, unter denen eine mit der Exponentensumme Null ist, so nenne man diese a_1. Andernfalls kommen in R_1 zwei Erzeugende, etwa a_1 und a_2 mit den von Null verschiedenen Exponentensummen s_1 und s_2 vor. Durch eine Substitution $a_1 = b_1^{-s_2}$, $a_2 = b_1^{s_1} b_2$ wird die Zahl der $a_2, a_3, \ldots$-Zeichen in R_1 gleich der Zahl der $b_2, a_3, \ldots$-Zeichen nach Einführung von b_1 und b_2, und b_1 hat in R_1 die Exponentensumme Null [18]). Man bezeichne b_1 bzw. b_2 mit a_1 und a_2 in neuer Bedeutung. Man setze $a_1^K a_\nu a_1^{-K} = a_{\nu,K}$ für $\nu = 2, \ldots, n$ und alle ganzen Zahlen K. R_1 bzw. R_2 gehen in Worte $P_1(\ldots a_{\nu,K} \ldots)$ bzw. $P_2(\ldots a_{\nu,K} \ldots)$ über, welche weniger Zeichen als R_1 bzw. R_2 enthalten. Man setze für alle ganzzahligen λ:

$$P_1(\ldots a_{\nu,K+\lambda} \ldots) = P_{1,\lambda}$$
$$P_2(\ldots a_{\nu,K+\lambda} \ldots) = P_{2,\lambda}.$$

Sind dann t_i bzw. τ_i die Exponentensummen von a_1 in T_i bzw. $\overline{T}_i$, so gehen die Identitäten (2) in die folgenden Identitäten in den $a_{\nu,K}$ über:

$$(3) \qquad P_{1,0} \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i P_{2,t_i}^{e_i} T_i^{-1}$$

$$(\bar{3}) \qquad P_{2,0} \equiv \prod_{i=1}^{\bar{h}} \bar{T}_i P_{1,\tau_i}^{\bar{e}_i} \bar{T}_i^{-1},$$

wobei die T_i und $\overline{T}_i$ jetzt Worte in den $a_{\nu,K}$ sind. Mit Hilfe des Freiheitssatzes in der Hauptform folgert [19]) man hieraus, daß es ein λ_0 gibt, so daß $P_{1,0} = 1$ und $P_{2,\lambda_0} = 1$ (bzw. $P_{2,0} = 1$ und $P_{1,-\lambda_0} = 1$) äquivalente Relationen sind. Damit ist man fertig, denn aus der vorausgesetzten Gültigkeit unseres Satzes für $P_{1,0} = 1$, $P_{2,\lambda_0} = 1$ folgt sogleich seine Gültigkeit für $R_1 = 1$, $R_2 = 1$.

3. *Wurzeln von $aba^{-1}b^{-1}$.* Als weitere Anwendung des Freiheitssatzes soll ein schon bekannter Satz [20]) über die Automorphismen der freien Gruppe von zwei Erzeugenden bewiesen werden. *Sind a und b die Erzeugenden einer freien Gruppe, so bilden zwei Worte*

---

[17]) Hier ist vorausgesetzt, daß die betreffenden Worte, zyklisch geschrieben, keine Absorptionen in sich zulassen.

[18]) Daß bei dieser Substitution in R_1 eventuell mehr b_1-Zeichen auftreten, als vorher a_1-Zeichen vorhanden waren, spielt keine Rolle, da nachher mit b_1 transformiert wird.

[19]) Es muß ein P_{2,λ_0} geben (wegen (3)), das nur Erzeugende enthält, die in $P_{1,0}$ vorkommen, und wegen $(\bar{3})$ muß es ein P_{1,λ_1} geben mit lauter Erzeugenden, die in $P_{2,0}$ auftreten. Daraus folgt, daß *alle* Erzeugenden, die in $P_{1,0}$ auftreten, auch in P_{2,λ_0} vorkommen, und hieraus, daß $P_{1,0} = 1$ aus $P_{2,\lambda_0} = 1$ alleine folgt. Ganz analog folgt das Umgekehrte.

[20]) *J. Nielsen*, Math. Annalen 78 (1918). Der Satz stammt von Herrn Dehn. Der im Text gegebene Beweis ist der ursprünglich von ihm vorgesehene.

α und β aus a und b dann und nur dann ein Paar zusammengehöriger primitiver Elemente (d. h. sie können als neue Erzeugenden eingeführt werden), wenn identisch in a, b:

$$(4) \qquad \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \equiv T a b a^{-1} b^{-1} T^{-1}$$

ist. Der Beweis dieser Behauptung wird geführt mit Hilfe des folgenden Satzes: *Eine Wurzel von $aba^{-1}b^{-1}$ ist entweder ein primitives Element oder eine Transformierte von $aba^{-1}b^{-1}$.* Der Beweis hierfür kann so erbracht werden: Ist $R = 1$ eine Wurzel von $aba^{-1}b^{-1}$, so unterscheide man zwei Fälle: (1) R besitzt in b die Exponentensumme Null. In diesem Falle setze man $b^k a b^{-k} = a_k$. Nach einem schon oft verwendeten Schlusse gilt dann: Ist R, in den a_k geschrieben, gleich $P(\ldots a_k \ldots)$, so folgt $a_0 a_1^{-1} = 1$ aus endlich vielen Relationen des Systems: $P(\ldots a_k \ldots) = 1$, $P(\ldots a_{k+1} \ldots) = 1, \ldots$ Nach dem Freiheitssatz in der Hauptform gilt: Läßt P, zyklisch geschrieben, keine Absorptionen zu, so folgt $a_0 a_1^{-1} = 1$ entweder aus einer Relation $P(a_0, a_1) = 1$ oder aus zwei Relationen $P(a_0) = 1$, $P(a_1) = 1$. Der zweite Fall liefert $P(a_0) \equiv a_0^{\pm 1}$, $R \equiv T a^{\pm 1} T^{-1}$, also: R ist Transformierte von $a^{\pm 1}$.

Der erste Fall liefert, wenn man $a_0 a_1^{-1} = b_0$, $a_1 = b_1$ setzt: $b_0 = 1$ folgt aus $Q(b_0, b_1) = 1$ ($Q(b_0, b_1) = P(a_0, a_1)$). Nach dem Freiheitssatz ist $Q \equiv T_2 b_0^{\pm 1} T_2^{-1}$, also:

$$P \equiv T_1 (a_0 a_1^{-1})^{\pm 1} T_1^{-1}, \qquad R \equiv T a b a^{-1} b^{-1} T^{-1}.$$

Der Fall, daß a und b in R eine von Null verschiedene Exponentensumme besitzen, läßt sich auf diesen zurückführen. Sind nämlich s_1 bzw. s_2 die Exponentensummen von a bzw. b in R, und ist der größte gemeinsame Teiler von s_1 und s_2 gleich d, so kann man zu den teilerfremden Zahlen $\sigma_1 = \frac{s_1}{d}$ und $\sigma_2 = \frac{s_2}{d}$ ein Paar zusammengehöriger primitiver Elemente γ und δ finden, derart, daß γ in a bzw. b die Exponentensumme σ_1 bzw. σ_2 besitzt [21]). Da $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1$ Wurzel von $aba^{-1}b^{-1} = 1$ ist und umgekehrt, gilt: drückt man R in γ und δ aus, ist also $R(a, b) = P(\gamma, \delta)$, so ist $P(\gamma, \delta) = 1$ Wurzel von $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1$. Da δ in P die Exponentensumme Null besitzt, ist nach dem eben Bewiesenen P eine Transformierte von γ, also ein primitives Element.

Jetzt ist es leicht, zu beweisen, daß (4) dann und nur dann gilt, wenn α und β zusammengehörige primitive Elemente sind. Zunächst: Sind α und β zusammengehörige primitive Elemente, so bedeutet $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$, daß die Gruppe Abelsch ist; also wird $aba^{-1}b^{-1} = 1$, und da $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ in a und b die Exponentensummen Null hat, ist es eine Transformierte von $aba^{-1}b^{-1}$. Andererseits: Sind $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ zwei Worte, derart, daß

$$(\bar{4}) \qquad \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}^{-1} \equiv T(aba^{-1}b^{-1})T^{-1}$$

ist, so ist $\bar{\alpha}$ oder $\bar{\beta}$ primitives Element, da beide Wurzeln von $aba^{-1}b^{-1} = 1$ sind, und nicht

---

[21]) *Beweis*: Man darf $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ annehmen; andere Fälle sind trivial oder sofort auf diesen reduzierbar. Man setze:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= n_1\sigma_2 + \sigma_3, && \text{wobei} && 0 < \sigma_3 < \sigma_2 \\
\sigma_2 &= n_2\sigma_3 + \sigma_4, && \text{„} && 0 < \sigma_4 < \sigma_3 \\
&\cdots\cdots\cdots && && \cdots\cdots\cdots \\
\sigma_t &= n_t\sigma_{t+1} + 1, && \text{„} && 0 < \sigma_{t+2} < \sigma_{t+1} \\
\sigma_{t+1} &= n_{t+1}\cdot 1, && \text{„} && \sigma_{t+2} = 1 \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Dann wird $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ gleich dem Kettenbruch $\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots}}$; jetzt definiere man rekursiv:

$$\begin{array}{l|l|c|l} \gamma_1 = a^{n_1} b & \gamma_2 = \gamma_1^{n_2}\delta_1 & \ldots & \gamma_{i+1} = \gamma_i^{n_i+1}\delta_i \\ \delta_1 = b & \delta_2 = \gamma_1 & & \delta_{i+1} = \gamma_i \end{array}$$

für $i = 1, 2, \ldots, t$ und setze

$$\gamma = \gamma_{t+1}, \quad \delta = \delta_{t+1}.$$

beide Transformierte von $aba^{-1}b^{-1}$ sein können[22]). $\bar{\alpha}$ sei also primitives Element und heiße fortan α. Zu zeigen ist, daß $\bar{\beta}$ ein zugehöriges primitives Element ist. Man wähle ein zu α gehöriges primitives Element β. $\bar{\beta}$ ist dann ein Wort in α und β, und die Identität ($\bar{4}$) geht in die folgende Identität in α, β über:

$$(5) \qquad \alpha\bar{\beta}\alpha^{-1}\bar{\beta}^{-1} \equiv T\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}T^{-1}.$$

Es sei s die Exponentensumme von α in β, t die von α in T. Es sei $\alpha^K\beta\alpha^{-K} = \beta_K$ gesetzt; dann geht (5) in eine Identität in den β_K über:

$$(6) \qquad \bar{\bar{\beta}}(\ldots\beta_{K+1}\ldots)\,\bar{\bar{\beta}}^{-1}(\ldots\beta_K\ldots) \equiv \bar{T}\beta_{t+1}\beta_t^{-1}\bar{T}^{-1},$$

wobei $\bar{\bar{\beta}}(\ldots\beta_K\ldots)\alpha^s = \bar{\beta}$ ist.

Wie man sofort sieht, kann sich in (6) links, — wenn man zyklisch schreibt —, nicht das erste Zeichen gegen das letzte fortheben; denn wenn $\bar{\bar{\beta}}(\ldots\beta_{K+1}\ldots)$ mit β_L anfängt, hört $\bar{\bar{\beta}}^{-1}(\ldots\beta_K\ldots)$ mit β_{L-1}^{-1} auf. Also ist entweder $\bar{T} \equiv 1$ oder $\bar{T} \equiv \beta_t^{+1}$ oder $\bar{T} \equiv \beta_{t+1}^{-1}$, und daraus folgt: $\bar{\beta} \equiv \alpha^{s_1}\beta^{\pm 1}\alpha^{s_2}$, $s_1 + s_2 = s$. Da α und β zusammengehörige primitive Elemente sind, gilt mithin dasselbe von α und $\bar{\beta}$.

§ 7. Beispiele zu der Aufgabe: Alle Wurzeln eines gegebenen Wortes zu finden.

1. *Vorbemerkung*: Die Wurzeln von $aba^{-1}b^{-1}$ ließen sich deshalb verhältnismäßig einfach alle bestimmen, weil die Vertauschbarkeit der Erzeugenden eine charakteristische (von der speziellen Art der Darstellung unabhängige) Eigenschaft der Gruppe ist. $aba^{-1}b^{-1}$ hat unendlich viele nicht ineinander transformierbare Wurzeln; dies ist wesentlich dadurch bedingt, daß $aba^{-1}b^{-1}$ in a und in b die Exponentensumme Null hat, so daß die Exponentensummen von a und b in den Wurzeln von $aba^{-1}b^{-1}$ keiner Beschränkung unterliegen.

Im Gegensatz dazu behandeln die folgenden Beispiele die Wurzeln einiger „einfacher" Worte, die in a oder b eine von Null verschiedene Exponentensumme besitzen. Völlig durchführbar wird die Betrachtung nur in sehr speziellen Fällen wie zum Beispiel für die Frage nach den Wurzeln von a^2b^p (p eine Primzahl), oder a^2b^{2p}.

Die im folgenden gebrauchten Hilfsmittel lassen sich auch in anderen Fällen anwenden, reichen aber im allgemeinen nicht aus.

2. *Der Ansatz*: Man sucht die Wurzeln von $\bar{a}^n\bar{b}^m$. Man setze $\bar{a} = ab^{-m}$, $b = b^{-n}$. (Man darf $m \neq 0$, $n \neq 0$ annehmen, sonst ist alles trivial.) Jeder Wurzel von $\bar{a}^n\bar{b}^m$ entspricht genau eine von $[ab^{-m}]^n b^{-mn}$, wiewohl nicht umgekehrt[23]). $W \equiv (ab^{-m})^n b^{-mn}$ hat in b, aber nicht in a die Exponentensumme Null; folglich gilt dasselbe für jede Wurzel R von W. Im folgenden werden nur Wurzeln R von W betrachtet, die zyklisch geschrieben keine Absorptionen zulassen; die durch Transformation aus diesen hervorgehenden Wurzeln sollen nicht besonders erwähnt werden; ebenso soll von zwei Wurzeln, die Reziproke von einander sind, immer nur eine angeführt werden.

$R(a, b)$ sei, wenn man für alle ganzzahligen K $a_K = b^K a b^{-K}$ setzt, gleich einem Wort

---

[22]) Wie man sofort sieht, wenn man $b^K a b^{-K} = a_K$ setzt (für $K = 0, \pm 1, \ldots$) und ($\bar{4}$) in eine Identität in den a_K verwandelt und dann Abelsch macht.

[23]) Da es hier darauf ankommt, die Frage nach den Wurzeln von $a_1^n b_1^m$ auf die Frage nach den Wurzeln eines Wortes zurückzuführen, das in einer Erzeugenden die Exponentensumme Null hat, hätte man statt a und b auch geeignete primitive Elemente in $a_2(a, b)$ und $b_2(a, b)$ einführen können, so daß $a_1^n b_1^m = W(a_2, b_2)$ in b_2 die Exponentensumme Null hat. Doch wird dann W unübersichtlich.

$Q(\ldots a_K \ldots)$. *Es folgt dann*

$$W = a_0\, a_m\, a_{2m} \cdots a_{m(n-1)} = 1$$

aus endlich vielen Relationen ($\lambda = 0, \pm 1, \ldots$) $Q_\lambda \equiv Q(\ldots a_{K+\lambda} \ldots) = 1$. *Nach dem Freiheitssatz in der Hauptform hat man nur die Q_λ zu berücksichtigen, in denen ausschließlich a_K mit $0 \leqq K \leqq m(n-1)$ vorkommen.* Nimmt man an (was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet), daß in Q_0 höchstens $a_0, a_1, \ldots, a_s$ vorkommen (und zwar a_0 und a_s wirklich), so folgt

(1) $$a_0\, a_m \cdots a_{m(n-1)} = 1 \text{ aus}$$

(2) $$\left.\begin{array}{ll} Q(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_s) & = 1 \\ Q(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{s+1}) & = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ Q(a_{m(n-1)-s}, \ldots, a_{m(n-1)}) & = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m(n-1)+1-s \text{ Relationen} \\ \text{in } m(n-1)+1 \text{ Erzeugenden.} \end{array}$$

Das Bestehen einer Identität

(3) $$a_0\, a_m \cdots a_{m(n-1)} \equiv \prod_{i=1}^{h} T_i\, Q_{l_i}^{e_{l,i}}\, T_i^{-1},$$

wobei $e_{l,i} = \pm 1$ und l_i eine Zahl der Reihe $0, 1, \ldots, m(n-1) - s$ ist, wurde dabei schon benutzt; um aus ihr Aussagen über die Exponentensummen von $a_0, \ldots, a_s$ in Q_0 zu gewinnen, setze man: $\sum_i e_{l,i} = e_l$ (e_l ist sozusagen die Exponentensumme von Q_l in (3) rechts); bezeichnet man ferner die Exponentensumme von a_K in Q_0 ($K = 0, 1, \ldots, s$) mit d_k, (dies ist dann gleichzeitig die Exponentensumme von a_{K+l} in Q_l) und setzt man $c_i = \begin{cases} 1 \text{ für } m \mid i \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$ [c_i ist die Exponentensumme von a_i ($0 \leqq i \leqq m(n-1)$) in $a_0\, a_m \cdots a_{m(n-1)}$], so folgt aus (3) durch Abelschmachen:

(4) $$c_i = \sum_{0 \leqq i-l \leqq s} e_l\, d_{i-l}$$

für $i = 0, 1, \ldots, m(n-1) - s$. Die c_i sind bekannt. *Man sucht alle ganzzahligen Lösungen e_l, d_k von* (4); man kann dieselben leicht mit Hilfe der folgenden Bemerkung angeben: Die Gleichungen (4) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß identisch in einer Variablen z:

(5) $$\sum_{i=0}^{m(n-1)} c_i\, z^i = \left\{\sum_{l=0}^{m(n-1)-s} e_l\, z^l\right\}\left\{\sum_{k=0}^{s} d_k\, z^k\right\}$$

ist. Links steht dabei das Polynom:

$$1 + z^m + z^{2m} + \cdots + z^{m(n-1)} = \frac{z^{mn} - 1}{z^m - 1}.$$

Man erhält somit sowohl für die Zahl s wie für die Exponentensummen von $a_0, \ldots, a_s$ in Q_0 Beschränkungen durch die Bedingung: $\sum_{k=0}^{s} d_k\, z^k$ *ist Teiler von* $\frac{z^{mn} - 1}{z^m - 1}$. Da die d_k ganze Zahlen sind, gibt es nur endlich viele Lösungen von (4) in ganzen Zahlen. Leider gelang es nicht, zu zeigen, daß zu jeder Lösung von (4) nur endlich viele Relationensysteme (2) gehören, die (1) zur Folge haben. Dagegen kann es sehr wohl sein, daß zu einer Lösung von (4), (also zu einem „Abelsch möglichen" Relationensystem (2)) kein Relationensystem (2) gehört, das (1) zur Folge hat.

Das Haupthilfsmittel dieses Paragraphen wird der Satz sein:

3. *Haupthilfssatz. Folgt aus dem System* (2) (in Nr. 2) *die Relation* (1), *so kommen a_0 und a_s in $Q(a_0, \ldots, a_s)$ nur einmal vor.* (Wobei zu beachten ist, daß Q, zyklisch

geschrieben, keine Absorptionen in sich zuläßt). Zum Beweise dient zunächst die Bemerkung: Folgt aus (2) die Relation (1), so folgt aus dem System $(\bar{2})$ in den Erzeugenden $a_0, a_1, \ldots, a_{mn}$:

$$(\bar{2}) \qquad \begin{cases} Q(a_0, \ldots, a_s) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q(a_{mn-s}, \ldots, a_{mn}) = 1 \end{cases}$$

die Relation

$$(\bar{1}) \qquad a_0 a_{mn}^{-1} = 1.$$

Denn aus (2) folgt neben $a_0 a_m \cdots a_{m(n-1)} = 1$ auch noch $a_m a_{2m} \cdots a_{mn} = 1$ und hieraus folgt dann $(\bar{1})$. Jetzt ist zu zeigen: Folgt aus $(\bar{2})$ die Relation $(\bar{1})$, so kommen a_0 und a_s in $Q_0 \equiv Q(a_0, \ldots, a_s)$ nur einmal vor. Um dies zu beweisen, braucht man die Hilfssätze von § 5.

Zunächst folgt aus Hilfssatz 4, falls $s > 0$ (für $s = 0$ ist alles trivial): Alle Relationen für a_0 und a_{mn}, die aus $(\bar{2})$ folgen, erhält man aus $Q_{mn-s} \equiv Q(a_{mn-s}, \ldots, a_{mn}) = 1$ und den Relationen für a_0 und $a_{mn-s}, \ldots, a_{mn-1}$, die aus $Q_0 \equiv Q(a_0, \ldots, a_s) = 1, \ldots, Q_{mn-s-1} \equiv Q(a_{mn-s-1}, \ldots, a_{mn-1}) = 1$ folgen und etwa mit $S_r(a_0, a_{mn-s}, \ldots, a_{mn-1}) = 1$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnet werden mögen [24]). Jede Relation $S_r = 1$ enthält dabei das a_0 wirklich.

Jetzt wende man Hilfssatz 5 aus § 5 an, indem man identifiziert:

in Hilfssatz 5	— mit —	im vorliegenden Falle
a	,,	a_0
b	,,	a_{mn}
$R(a, b)$	,,	$a_0\ a_{mn}^{-1}$
t	,,	$a_{mn-s}, \ldots, a_{mn-1}$
das System (α)	,,	dem System $S_r = 1$
das System (β)	,,	der Relation $Q_{mn-s} = 1$.

Dann folgt zunächst aus (III) in Hilfssatz 5: Es gibt eine Relation aus dem System $S_r = 1$, etwa $S_{r_0} = 1$, so daß, bei geeigneter Wahl der Vorzeichen:

$$(a_0 a_{mn}^{-1})^{\pm 1} \equiv T_1 S_{r_0}^{\pm 1}(a_0, a_{mn-s}, \ldots, a_{mn-1})\, T_1^{-1} T_2 \bar{Q}_{mn-s}^{\pm 1} T_2^{-1}$$

wird, wobei $\bar{Q}_{mn-s}(a_{mn-s}, \ldots, a_{mn}) = 1$ aus $Q_{mn-s} = 1$ folgt. Durch Abelschmachen folgt, daß a_0 in S_{r_0} und a_{mn} in $\bar{Q}_{mn-s}$ die Exponentensumme $+1$ oder -1 besitzen muß. Durch Anwendung von (II) aus Hilfssatz 5 folgt hieraus: Entweder kommt in S_{r_0} die Erzeugende a_0 oder in $\bar{Q}_{mn-s}$ die Erzeugende a_{mn} nur einmal vor. Durch direkte Absorptionsbetrachtungen zeigt man leicht, daß das eine das andere zur Folge hat. a_{mn} kommt also in $\bar{Q}_{mn-s}$ nur einmal vor; daher ist $\bar{Q}_{mn-s}$ primitives Element. Q_{mn-s} ist Wurzel von $\bar{Q}_{mn-s}$ und folglich eine Transformierte von $\bar{Q}_{mn-s}$. Daraus folgt, daß auch

---

[24]) *Beweis*: Man identifiziere

in Hilfssatz 4, § 5,	— mit —	im vorliegenden Falle
a	,,	a_0
b	,,	a_{mn}
x	,,	$a_{mn-s}, \ldots, a_{mn-1}$
y	,,	$a_1, \ldots, a_{mn-s-1}$
das System (A_1)	,,	$Q_0 = 1, \ldots, Q_{mn-s-1} = 1$
das System (B_1)	,,	$Q_{mn-s} = 1$.

Daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 erfüllt sind, folgt leicht aus dem Freiheitssatz in der Hauptform.

Q_{mn-s} a_{mn} nur einmal enthält. Ganz genau so zeigt man, daß a_0 in Q_0 nur einmal vorkommt. Wegen der „Isomorphie" der Relationen (2) folgt damit: In jeder Relation $Q_t = 1$ $(t = 0, \ldots, mn - s)$ kommen a_t und a_{t+s} genau einmal vor.

4. *Anwendungen.* Um die bisher angestellten Betrachtungen anzuwenden, soll folgende Bezeichnung eingeführt werden: Sucht man die Relationensysteme (2), die (1) zur Folge haben, so unterliegen die Exponentensummen d_k der a_k in Q_0 den Bedingungen (4); man kann dies ausdrücken, indem man sagt: Q_0 ist Abelsch $= a_0^{d_0} a_1^{d_1} \cdots a_s^{d_s}$.

4. a) *Erstes Beispiel.* Um die Wurzeln von $\bar{a}^2 \bar{b}^p$ (p eine Primzahl) zu finden, verfährt man dann so: Man setzt $\bar{a} = a b^{+p}$, $\bar{b} = b^{-2}$. Die Wurzeln von $a b^p a b^p b^{-2p} = a b^p a b^{-p}$ findet man, indem man $b^k a b^{-k} = a_k$ setzt, und die Systeme

$$\left.\begin{aligned} &Q(a_0, \ldots, a_s) = 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Q(a_{p-s}, \ldots, a_p) = 1 \end{aligned}\right\}$$

sucht, aus denen $a_0 a_p = 1$ folgt. Entsprechend den Teilern mit ganzzahligen Koeffizienten von $z^p + 1$ ist $Q(a_0, \ldots, a_s)$ Abelsch entweder $= a_0^{\pm 1}$ oder $= (a_0 a_1)^{\pm 1}$ oder $= (a_0 a_1^{-1} a_2 \cdots a_{p-1})^{\pm 1}$ oder $= (a_0 a_p)^{\pm 1}$.

Da a_0 und a_s in $Q(a_0, \ldots, a_s)$ nur je einmal vorkommen, ist also entweder $Q_0 \equiv a_0^{\pm 1}$ oder $Q_0 \equiv (a_0 a_1)^{\pm 1}$ bzw. $(a_1 a_0)^{\pm 1}$ oder es ist $Q_0^{\pm 1}$ eine Transformierte von

$$W_0 \equiv a_0 H_1(a_1, \ldots, a_{p-2})\, a_{p-1}\, H_2(a_1, \ldots, a_{p-2}).$$

Damit aus $W_0 = 1$ und aus

$$W_1 \equiv a_1 H_1(a_2, \ldots, a_{p-1})\, a_p\, H_2(a_2, \ldots, a_{p-1}) \equiv 1$$

$a_0 a_p = 1$ folgt, muß

$$H_1(a_1, \ldots)\, a_{p-1}\, H_2(a_1, \ldots) \equiv H_1^{-1}(a_2, \ldots)\, a_1^{-1}\, H_2^{-1}(a_2, \ldots)$$

sein. Man stellt leicht durch direkte Absorptionsbetrachtungen fest, daß dies nicht möglich ist. In diesem Falle ist also zu einer Lösung von (4) kein Q vorhanden. Ist schließlich Q_0 Abelsch $= (a_0 a_p)^{\pm 1}$, so führe man $a_0 a_p$ als neue Erzeugende ein (etwa zusammen mit a_1 bis a_p) und findet $Q_0 \equiv (a_0 a_p)^{\pm 1}$ bzw. $\equiv (a_p a_0)^{\pm 1}$.

Also: Die Wurzeln von $a b^p a b^{-p}$ sind gegeben durch: $a = 1$; oder: $a b a b^{-1} = 1$ oder $a b^p a b^{-p} = 1$. Zu $1 = a b a b^{-1}$ und $a b^p a b^{-p} = 1$ gehören für $p \neq 2$ die Wurzeln $\left(\bar{a}\, \bar{b}^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \bar{b} = 1$ bzw. $\bar{a}^2 \bar{b}^p = 1$ von $\bar{a}^2 \bar{b}^p$; dagegen gehört zu $a = 1$ keine Wurzel von $\bar{a}^2 \bar{b}^p$. Für $p = 2$ erhält man zu $a b a b^{-1} = 1$ keine Wurzel von $\bar{a}^2 \bar{b}^p$, dagegen zu $a = 1$ bzw. $a b^2 a b^{-2} = 1$ die Wurzeln $\bar{a}\bar{b} = 1$ bzw. $\bar{a}^2 \bar{b}^2 = 1$.

4. b) *Ähnliche Beispiele.* Ganz ähnlich lassen sich alle nicht ineinander transformierbaren Wurzeln von $a^2 b^{2k}$, $a^p b^{pk}$ und ähnlichen Worten bestimmen.

5. *Einfache, nicht gelöste Aufgabe.* Aber schon die einfache Frage nach *den* Wurzeln von $a b^6 a^{-1} b^{-6}$, die in b die Exponentensumme Null haben, läßt sich so nicht erledigen: Soll nämlich

$$a_0 a_6^{-1} = 1 \text{ aus } \begin{cases} Q(a_0, \ldots\ldots, a_4) = 1 \\ Q(a_1, \ldots\ldots, a_5) = 1 \\ Q(a_2, \ldots\ldots, a_6) = 1 \end{cases}$$

folgen. (Q_0 ist Abelsch $= a_0 a_2 a_4$), so erhält man erstens — im Gegensatz zum Bisherigen — zu *einer* Lösung von (4) *zwei* nicht ineinander transformierbare nicht reziproke Lösungen

$Q_0 \equiv a_0 a_2 a_4$ und $Q_0 \equiv a_2 a_0 a_4$, und es gelang zweitens mit den vorliegenden Hilfsmitteln nicht, nachzuweisen, daß es nicht noch unendlich viele weitere derartige Lösungen gibt. Man müßte hierzu z. B. beweisen können, daß auch a_2 in Q_0 nur einmal vorkommen kann.

Anhang: § 8. Bemerkungen über Gruppen mit zwei definierenden Relationen.

Es seien $a, b, c, \ldots$ die Erzeugenden, $R_1(a, b, c, \ldots) = 1$, $R_2(a, b, c \ldots,) = 1$ die definierenden Relationen einer Gruppe. Man kann — wie bei einrelationigen Gruppen — die Frage nach *den* Worten $W(a, b, c, \ldots)$, welche auf Grund von $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ gleich eins sind (Identitätsproblem), dadurch zu beantworten suchen, daß man nach allen Relationenpaaren $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ fragt, auf Grund derer ein fest gegebenes Wort W gleich eins wird (Wurzelproblem). Die Lösung dieses Problems liefert dabei nur dann etwas Neues, wenn sie sich nicht auf die Frage reduzieren läßt: Diejenigen (einzelnen) Relationen $R = 1$ zu finden, auf Grund derer W gleich eins wird. (Dies ist das zu einrelationigen Gruppen gehörige Wurzelproblem.) Diese Möglichkeit einer Reduktion des oben formulierten Problems tritt zum Beispiel dann ein, wenn $W = 1$ deshalb aus dem Relationen*paar* (1) $\{R_1 = 1, R_2 = 1\}$ folgt, weil $W = 1$ schon aus $R_1 = 1$ (oder $R_2 = 1$) allein folgt; allgemein wird eine solche Reduktion stets dann ausführbar sein, wenn das Relationenpaar $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ in einem sogleich anzugebenden Sinne „äquivalent" ist mit einem Relationenpaar (1′) $\{R_1' = 1, R_2' = 1\}$, derart, daß $W = 1$ schon aus $R_1' = 1$ allein folgt. Die Relationenpaare (1) und (1′) sollen dabei äquivalent heißen, wenn das Bestehen von (1) das Bestehen von (1′) nach sich zieht, und umgekehrt.

In Anlehnung an die Terminologie der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen soll das Relationenpaar (1), wenn es nicht mit einem Paare (1′) äquivalent ist, derart, daß $W = 1$ schon aus $R_1' = 1$ allein folgt, eine „*Idealwurzel*" von W heißen. Bevor wir die an das Auffinden von Idealwurzeln anknüpfenden Fragen vorführen, ist vielleicht eine Bemerkung über die Frage am Platze, wann zwei Relationen*paare* äquivalent sind, da diese Frage nach dem obenstehenden von Bedeutung ist, wenn man entscheiden will, ob ein gegebenes Relationenpaar (1) eine *Ideal*wurzel von W ist. Die entsprechende Aufgabe, welche sich bei der Behandlung einrelationiger Gruppen ergab (zu entscheiden, wann zwei Relationen äquivalent sind), wurde in § 6 im zweiten Teil mit Hilfe des Freiheitssatzes gelöst. Die „natürliche" Verallgemeinerung des dort erzielten Resultates (äquivalente Relationen gehen durch Transformation auseinander hervor) wäre wohl der folgende Satz: Äquivalente Relationenpaare gehen durch Wiederholung des folgenden Prozesses auseinander hervor: Sind $R_1 = 1$ und $R_2 = 1$ die ursprünglichen Relationen, so bilde man — in Analogie zu der Bildungsweise zusammengehöriger primitiver Elemente aus den ursprünglich gegebenen Erzeugenden [25]) — die Ausdrücke:

$$R_1' \equiv T_1 R_1^{\pm 1} T_1^{-1} T_2 R_2^{\pm 1} T_2^{-1}$$
$$R_2' \equiv T R_2 T^{-1} \text{ (bzw. } R_2' \equiv T R_1 T^{-1}).$$

Das Relationenpaar $R_1' = 1$, $R_2' = 1$ ist dann mit dem Paar $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ äquivalent, und der vermutete Satz behauptet eben, daß man durch Wiederholung des Verfahrens, das von $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ zu $R_1' = 1$, $R_2' = 1$ führt, alle mit $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ äquivalenten Relationenpaare erhalten kann. Zum Beweise fehlt vorläufig jeder Ansatz. Der Zusammenhang zwischen der Frage nach äquivalenten Relationenpaaren und der Frage nach den Idealwurzeln eines gegebenen Wortes W tritt hervor, wenn man nach den Idealwurzeln der „einfachsten" Worte, der Erzeugenden fragt, also etwa $W \equiv a$ setzt. Hier ist nämlich die Vermutung, daß a keine Idealwurzeln besitzt, gleichbedeutend damit, daß jedes Relationenpaar $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, aus welchem $a = 1$ folgt, äquivalent ist mit

[25]) *J. Nielsen*, Math. Annalen 78 (1918).

einem Paar: $a = 1$, $R = 1$, dessen eine Relation $a = 1$ ist. Diese Vermutung ist als Verallgemeinerung des im ersten Teil bewiesenen Satzes aufzufassen, daß $P \equiv T a^{\pm 1} T^{-1}$ ist, wenn aus $P = 1$ $a = 1$ folgt. Hier ist bemerkenswert, daß jedenfalls gewisse Potenzen von a Idealwurzeln besitzen; für a^3 liefert das folgende Beispiel eine solche: Aus

$$(2)\left\{\begin{matrix} b^2 = 1 \\ b a b^{-1} = a^{+2} \end{matrix}\right\} \text{ folgt } a^3 = 1 \text{ (es wird nämlich } b^2 a b^{-2} = b(b a b^{-1}) b^{-1} = b a^{+2} b^{-1}$$
$$= (b a b^{-1})^{+2} = a^4 = b^2 a b^{-2} = a).$$

Die durch (2) definierte Gruppe ist die symmetrische Gruppe der Permutationen von drei Dingen, die $S_{3!}$ [26]). Es soll jetzt gezeigt werden, daß keine mit (2) äquivalente Darstellung der $S_{3!}$ durch ein Relationenpaar (2′) $\{a^3 = 1, Q(a, b) = 1\}$ gegeben werden kann. (Eine Darstellung durch $\{a = 1, Q(a, b) = 1\}$ kommt nicht in Frage, da a nicht gleich eins ist). Bezeichnen nämlich α und β resp. die Exponentensummen von a und b in Q, so müssen, wenn (2′) mit (2) äquivalent sein soll, nach einem oft gebrauchten Schlusse die folgenden Gleichungen mit ganzen Zahlen $\lambda_1, \ldots$ bestehen:

$$\begin{matrix} 3\lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0 & & 3\mu_1 + \alpha\mu_2 = -1 \\ \beta\lambda_2 = 2 & & \beta\mu_2 = 0. \end{matrix}$$

Wegen $\lambda_2 \beta = 2$ ist $\lambda_2 \neq 0$, $\alpha \equiv 0$ (mod. 3), und dies ist ein Widerspruch mit $3\mu_1 + \alpha\mu_2 = -1$. Zu diesem Beispiel ist zu bemerken: Durch (2) wird eine endliche, nicht zyklische Gruppe definiert. Da in endlichen Gruppen stets eine Potenz jeder Erzeugenden gleich eins ist, liegt es nahe, Idealwurzeln von Potenzen von Erzeugenden unter solchen Relationenpaaren zu suchen, welche endliche, nicht zyklische Gruppen liefern. In der Tat liefern zum Beispiel die folgenden Relationenpaare für beliebiges ganzzahliges n und für $m = 2, 3, 4, 5$: (3) $a^2 = b^3$; $(ab)^m b^{3n} = 1$ endliche nicht zyklische Gruppen; die vorliegende Darstellung (3) derselben stammt aus Untersuchungen von Herrn Dehn über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, die aus Knoten entstehen. Je nachdem, ob $m = 2, 3, 4$ oder 5 ist, erzeugt nämlich das Element $a^2 = b^3$ eine zyklische invariante Untergruppe der Ordnung $|3n + 5|$ bzw. $|4n + 10|$ bzw. $|6n + 20|$ bzw. $|12n + 50|$. Die Faktorgruppe dieser zyklischen Untergruppe ist dann resp. die $S_{3!}$, die Tetraëder-, Oktaëder-, Ikosaëder-Gruppe. In der Tat liefert das Relationenpaar (3) für die verschiedenen Worte von n und m Idealwurzeln zu verschiedenen Potenzen von b oder a; jedoch fand ich weder mit Hilfe der Relationenpaare (3), noch sonst irgendwo Idealwurzeln von a^2, so daß immerhin die Möglichkeit besteht, daß außer a selber für einzelne Exponenten $n > 1$ a^n keine Idealwurzeln besitzt.

Zum Schluß sei noch ein Problem erwähnt, das ebensogut am Anfang dieses Paragraphen hätte stehen können: Die Frage, wann eine Gruppe mit den Erzeugenden $a, b, c, \ldots$ und den Relationen $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ wirklich *wesentlich zweirelationig* ist, d. h. wann die Gruppe nicht isomorph mit einer anderen Gruppe ist, welche nur eine (oder gar keine) definierende Relation besitzt. Das tritt zum Beispiel ein, wenn R_1 eine Wurzel von R_2 ist; — und zu entscheiden, ob dies der Fall ist, ist eine im allgemeinen Fall nicht gelöste Aufgabe.

---

[26]) Diese Darstellung der $S_{3!}$ ist der Arbeit von *G. A. Miller*, Finite Groups, wich may be defined by two Operators, satisfying two conditions, American Journal of Math. **31** (1909), entnommen.

Anmerkung während der Korrektur: Ich bemerke jetzt, daß der gemeinsame Kern der Hilfssätze 1—4 (§§ 3 und 5) der Satz von O. Schreier über die „Existenz des freien Produktes mit vereinigten Untergruppen“ ist (*O. Schreier*, Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. aus d. Seminar d. Hamburgischen Universität **5** (1927), S. 161). Diesen Satz kann man mit Vorteil statt der Hilfssätze 1, 2, 3 (§ 3) zum Beweise des Freiheitssatzes benutzen. Ich werde darüber an anderer Stelle berichten.

In der eben zitierten Arbeit von Schreier wird auch der Satz von § 2, Nr. 2 abgeleitet; ich hatte ihn einer Ausarbeitung des in der Einleitung erwähnten Vortrages von Dehn entnommen.

Eingegangen 30. Dezember 1929.

Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen.

Von *Julius Wellstein* in Karlsruhe.

Literatur.

1. *Frobenius, G.* Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen. Berliner Sitzungsberichte, Math. phys. Klasse 1896.
2. *Frobenius, G.* Über vertauschbare Matrizen. Berliner Sitzungsberichte, Math. phys. Klasse 1896.
3. *Frobenius, G.* Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen. Berliner Sitzungsberichte, Math. phys. Klasse 1910.
4. *Frobenius, G.* Über den Rang einer Matrix. Berliner Sitzungsberichte, Math. phys. Klasse 1911.
5. *Muth, P.* Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Leipzig 1899.
6. *Wellstein, Joseph.* Über die Frobeniusschen Kovarianten einer Bilinearform. Archiv der Math. u. Phys. (3) **5** (1903), S. 229—241.

In der Theorie der linearen Transformationen und bei ihren mannigfachen Anwendungen bedient man sich häufig einer „Normalform“ $\mathfrak{M}$, in die man eine gegebene Matrix M durch eine geeignete Transformation U überführen kann, wobei zwischen M und $\mathfrak{M}$ die Beziehung $UMU^{-1} = \mathfrak{M}$ besteht — man pflegt dann die Matrizen M und $\mathfrak{M}$ zueinander „ähnlich“ zu nennen —. Vielfach nimmt man $\mathfrak{M}$ in der von C. Jordan [1]) angegebenen Form an, mit der andere, zuweilen benutzte Normalformen in einfachem Zusammenhange stehen. Alle diese Normalformen sind aber, im allgemeinen wenigstens, weder symmetrisch, noch alternierend, noch orthogonal, wenn M eine dieser Eigenschaften hat, und man wird wünschen, für symmetrische bzw. alternierende, bzw. orthogonale Matrizen explizit angebbare, zu ihnen ähnliche Normalformen der gleichen Eigenschaft zur Verfügung zu haben. Für Matrizen, die außerdem noch reell sind, sind solche Normalformen ja schon lange bekannt, bei Matrizen mit komplexen Argumenten dagegen fehlen sie meines Wissens bisher. Diese Lücke auszufüllen ist der Zweck vorliegender Arbeit.

Zur Herleitung der Jordanschen Normalform stehen nun durchaus einfache und noch neuerdings verbesserte [2]) Verfahren zur Verfügung, welche die Anwendung der — sonst viel weiter tragenden — Elementarteilertheorie vermeiden; daß diese Theorie auch bei der gestellten Aufgabe entbehrlich ist, soll diese Arbeit in methodischer Hinsicht zeigen.

Eine möglichst gedrängte Darstellung der „Theorie der einzelnen Matrix“ (§ 1) stellt das — an sich längst vorhandene — Material zur Herleitung zweier Sätze bereit, die gewisse fundamentale Elementarteilertheoreme von Frobenius und Kronecker über alternierende und orthogonale Matrizen ersetzen sollen (§ 2). Hieran schließen sich die expliziten Aufstellungen symmetrischer (§ 3), alternierender (§ 4), orthogonaler (§ 5)

[1]) *C. Jordan*, Traité des substitutions, Paris 1870, S. 114 ff.

[2]) [L. 4. ≡ Literaturverzeichnis Nr. 4] § 2—5, [L. 6.]. Neuere Darstellungen findet man in *H. Weyl*, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, Anhang 12, sowie in *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Auflage Berlin 1926, S. 379 ff.

Normalformen; im Zusammenhang mit den letzteren wird dann noch für eingliedrige Gruppen orthogonaler Substitutionen eine Normalform angegeben.

§ 1. Theorie der einzelnen Matrix.

1. Quadratische Matrizen von n^2 Elementen seien durch große lateinische Buchstaben bezeichnet, durch kleine lateinische Buchstaben die „Vektormatrizen", die also außerhalb der ersten Spalte lauter Nullen enthalten.

Ist M eine Matrix, E die Einheitsmatrix, ξ eine Variable, so heißen die Determinante

$$(1)\quad f(\xi) = |\xi E - M| = (\xi - \lambda_1)^{r_1}(\xi - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\xi - \lambda_s)^{r_s},\ r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$$

die „charakteristische Funktion", ihre voneinander verschiedenen Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ die „Eigenwerte" der Matrix M. Dann besteht die Beziehung $f(M) = 0$, und ist $\varphi(M) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der M genügt, so ist

$$(2)\quad \varphi(\xi) = (\xi - \lambda_1)^{\varrho_1}(\xi - \lambda_2)^{\varrho_2}\cdots(\xi - \lambda_s)^{\varrho_s},\ \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_s \equiv \varrho \leqq n,$$

und $\varphi(\xi)$ heißt die „reduzierte charakteristische Funktion" von M; es ist also $f(\xi) = \varphi(\xi)\,\Theta(\xi)$, und $\Theta(\xi)$ ist der Hauptteiler aller Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung der Matrix $\xi E - M$ [3]).

Ist

$$(3)\qquad n - \tau_{h,k} \text{ der Rang der Matrix } (M - \lambda_h E)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

so ist von dem in (2) auftretenden Exponenten $\varrho_h \leqq n$ an:

$$(4)\qquad \tau_{h,\varrho_h} = \tau_{h,\varrho_h+1} = \tau_{h,\varrho_h+2} = \cdots = r_h,$$

er heißt der „charakteristische Exponent", $(M - \lambda_h E)^{\varrho_h}$ die „charakteristische Potenz" der Matrix $M - \lambda_h E$. Die positiven ganzen Zahlen

$$(5)\qquad \tau_{h,1}, \tau_{h,2}, \ldots, \tau_{h,\varrho_h}$$

bilden eine nicht fallende Reihe, deren zweite Differenzenreihe

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\delta_{h,1} = -\tau_{h,2} + 2\tau_{h,1},\ \delta_{h,2} = -\tau_{h,3} + 2\tau_{h,2} - \tau_{h,1}, \ldots,\\ &\delta_{h,\mu} = -\tau_{h,\mu+1} + 2\tau_{h,\mu} - \tau_{h,\mu-1}, \ldots, \delta_{h,\varrho_h} = \tau_{h,\varrho_h} - \tau_{h,\varrho_h-1}, \end{aligned}$$

aus nicht negativen Zahlen besteht; stets ist

$$(7)\qquad \delta_{h,\varrho_h} \neq 0.$$

Diese Zahlen sollen als „die zum Eigenwerte λ_h gehörenden Feldzahlen" bezeichnet werden.

2. Um nun zu zeigen, daß es Matrizen mit beliebig vorgegebenen Eigenwerten und Feldzahlen gibt, erklären wir die Jordansche Normalform $\mathfrak{M}$ folgendermaßen:

Die Matrix $\mathfrak{M}$ ist eine „Ländermatrix", d. h. sie zerfällt in s quadratische „Länder" $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_s$, die sich längs der Hauptdiagonale (von links oben nach rechts unten) aneinanderreihen; außerhalb der Länder stehen lauter Nullen. Eine solche Ländermatrix bezeichne das Symbol:

$$(8)\qquad \mathfrak{M} = \langle \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_s \rangle.$$

Das Land $\mathfrak{L}_h$ enthält r_h Zeilen und r_h Spalten und zerfällt wieder in quadratische „Felder" $\mathfrak{F}_k$, die längs der Hauptdiagonale stehen, während die übrigen Elemente Nullen sind. Es folgen aufeinander $\delta_{h,1}$ Felder $\mathfrak{F}_1$, $\delta_{h,2}$ Felder $\mathfrak{F}_2, \ldots, \delta_{h,\varrho_h} \neq 0$ Felder $\mathfrak{F}_{\varrho_h}$; diese Anordnung sei durch die symbolische Bezeichnung

$$(9)\qquad \mathfrak{L}_h = \langle \underbrace{\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_1}_{\delta_{h,1}}; \underbrace{\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_2}_{\delta_{h,2}}; \ldots; \underbrace{\mathfrak{F}_{\varrho_h}, \ldots, \mathfrak{F}_{\varrho_h}}_{\delta_{h,\varrho_h}} \rangle$$

[3]) Vgl. *Frobenius, G.* [L. 2.] § 1.

angedeutet. Die „Feldzahl" $\delta_{h,k}$ gibt also an, wie oft das Feld $\mathfrak{F}_k$ im Lande $\mathfrak{L}_h$ auftritt.

Ein einzelnes Feld $\mathfrak{F}_k$ hat k Zeilen und k Spalten und enthält in der Hauptdiagonale das Element λ_h, in der ersten dazu parallelen Schrägreihe rechts das Element 1, sonst lauter Nullen:

$$(10) \qquad \mathfrak{F}_k = \begin{pmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_h \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}_1 = (\lambda), \quad \mathfrak{F}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_h & 1 \\ 0 & \lambda_h \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet $\mathfrak{E}_k$ die Einheitsmatrix von k Zeilen und k Spalten, und ist

$$(11) \qquad \mathfrak{T}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{so ist} \quad \mathfrak{F}_k = \lambda_h \mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k .$$

Die Potenzen $\mathfrak{T}_k, \mathfrak{T}_k^2, \mathfrak{T}_k^3, \dots$ haben nur in der ersten, bzw. zweiten, bzw. dritten, ... rechten Schrägreihe $(k-1)$-mal, bzw. $(k-2)$-mal, bzw. $(k-3)$-mal, ... das Element 1, sonst Nullen ($\mathfrak{T}_k^k = 0$), und daher sind ihre Rangzahlen $k-1$, $k-2$, $k-3$, ...

Hieraus und aus (8), (9) sieht man nun sofort, daß $\mathfrak{M}$ die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ besitzt und daß der Potenz $(\mathfrak{M} - \lambda_h E)^k$ der Rang $n - \tau_{h,k}$ zukommt, wo

$$(12) \qquad \tau_{h,k} = \delta_{h,1} + 2\delta_{h,2} + \cdots + (k-1)\delta_{h,k-1} + k(\delta_{h,k} + \delta_{h,k+1} + \cdots + \delta_{h,\varrho_h}), \qquad k = 1, 2, \dots, \varrho_h$$

ist, d. h. aber, daß zwischen den $\tau_{h,k}$ und $\delta_{h,k}$ der durch (6) gegebene Zusammenhang besteht; damit ist erwiesen, daß zu dem Eigenwerte λ_h von $\mathfrak{M}$ die gegebenen Zahlen $\delta_{h,1}, \delta_{h,2}, \dots, \delta_{h,\varrho_h}$ als Feldzahlen gehören.

3. Unter der „Klasse $\mathfrak{K}_M$" der zu M ähnlichen Matrizen versteht man die Gesamtheit der Matrizen, die sich in der Form $U^{-1}MU$ darstellen lassen, wo U eine beliebige reguläre (d. h. $|U| \neq 0$) Matrix ist. Die Klasse ist durch jedes ihrer Elemente bestimmt, und wie man nach Nr. 1 unmittelbar sieht, haben die Matrizen einer Klasse die Eigenwerte und die zu ihnen gehörenden Feldzahlen gemeinsam; daß aber zu diesen arithmetischen Invarianten stets mindestens eine Klasse existiert, ist durch die Aufstellung der Jordanschen Normalform bewiesen. Die Eindeutigkeit der Existenz wird nun verbürgt durch den

Satz I. *Stimmen eine Matrix M und eine Jordansche Normalform $\mathfrak{M}$ überein in den Eigenwerten und den zu gleichen Eigenwerten gehörenden Feldzahlen, so gehören sie derselben Klasse an.*

Aus diesem Satze gewinnt man sofort den umfassenden, fundamentalen

Satz II. *Zwei Matrizen gehören zu derselben Klasse ähnlicher Matrizen dann und nur dann, wenn sie übereinstimmen in den Eigenwerten und den zu gleichen Eigenwerten gehörenden Feldzahlen.*

Der Satz I behauptet also die Existenz (mindestens) einer Matrix X, so daß $M = X^{-1}\mathfrak{M}X$ ist, und liefert somit die Transformation einer Matrix auf ihre Jordansche Normalform. Die von der Elementarteilertheorie freien Beweise gehen nun im wesentlichen von den linear unabhängigen Lösungen der Gleichungen $(M - \lambda_h E)^{\varrho_h} x = 0$ aus, ordnen sie nach Ketten von Normallösungen und bauen aus diesen Spalten die trans-

formierende Matrix X auf [4]). Diese Beweismethoden hier auseinanderzusetzen und nach den benutzten Hilfsmitteln — man könnte mit dem Rangbegriff allein auskommen — zu vergleichen, würde zu weit führen.

Die Elementarteilertheorie liefert eine zweite und wesentlich verschiedene Beweismethode des Satzes I, den sie auch anders formulieren muß. Auch hier soll ein näheres Eingehen unterbleiben; doch sei wenigstens auf den Zusammenhang zwischen den Elementarteilerexponenten (Charakteristik) und den Feldzahlen hingewiesen.

Die zur Basis $\xi - \lambda_h$ gehörenden Elementarteiler [5]) der Determinante $|\xi E - M|$ sind die Potenzen $(\xi - \lambda_h)^k$, jede $\delta_{h,k}$ mal gerechnet, und die zu dem Eigenwerte λ gehörende Charakteristik besteht aus den Exponenten $1, 2, \ldots, \varrho_h$, jeden $\delta_{h,1}$-mal, $\delta_{h,2}$-mal, ..., δ_{h,ϱ_h}-mal angeführt. Die Feldzahlen und die Charakteristik bestimmen einander also gegenseitig.

4. Die Brauchbarkeit der neueren Methoden mögen einige Beispiele zeigen. Zunächst sei folgender bekannte Satz erwähnt:

Satz III. *Die Eigenwerte einer reellen* $\left\{\begin{array}{l}\textit{symmetrischen}\\ \textit{alternierenden}\\ \textit{orthogonalen}\end{array}\right\}$ *Matrix sind* $\left\{\begin{array}{l}\textit{reell}\\ \textit{rein imaginär}\\ \textit{vom Absolutwerte 1}\end{array}\right\}$.

Die Beweise lassen sich in wenigen Zeilen bringen und seien hier weggelassen. Ferner gilt:

Satz IV. *Bei einer reellen symmetrischen oder alternierenden oder orthogonalen Matrix gehören zu allen Eigenwerten die charakteristischen Exponenten* 1.

(In der Sprechweise der Elementarteilertheorie heißt das also, ihre charakteristischen Determinanten haben lineare Elementarteiler).

Man hat also nur zu zeigen, daß für eine solche Matrix M, von der λ irgendein Eigenwert sei, die Potenzen $(M - \lambda E)^2$ und $M - \lambda E$ denselben Rang haben, und dazu genügt es, nachzuweisen, daß jede Lösung der Gleichung $(M - \lambda E)^2 x = 0$ auch die Gleichung $(M - \lambda E)x = 0$ erfüllt.

Setzt man $y = (M - \lambda E)x$, und bezeichnen Querstriche den konjugiert komplexen Wert, so ist [6]):

$$\bar{y}'\, y = \bar{x}'(\overline{M}' - \bar{\lambda}E)\,(M - \lambda E)\, x\,. \tag{13}$$

a) Ist nun M reell symmetrisch, so ist λ reell, und (13) geht über in $\bar{y}'y = \bar{x}'(M - \lambda E)^2 x = 0$, und hieraus folgt $y = 0$.

b) Ist M reell alternierend, so ist $\bar{\lambda} = -\lambda$, aus (13) folgt $\bar{y}'y = -\bar{x}'(M - \lambda E)^2 x = 0$, also $y = 0$.

c) Ist schließlich M reell orthogonal, so ist $\bar{\lambda}\lambda = 1$, also $\overline{M}' - \bar{\lambda}E = \bar{\lambda}M'(\lambda E - M)$, und nach (13) ist $\bar{y}'y = -\bar{x}'\bar{\lambda}\overline{M}'(M - \lambda E)^2 x = 0$, d. h. $y = 0$.

Damit ist Satz IV bewiesen. Nun noch ein Satz über Eigenwerte:

Satz V. *Ist die Matrix M reell, so sind die von Null verschiedenen Eigenwerte der Matrix $M'M$ positiv.*

---

[4]) Siehe etwa [L. 4.] §§ 3, 4 und [L. 6.], sowie Anmerkung [2]).

[5]) Vgl. etwa [L. 5] § 1, sowie *Bôcher, M.*, Einführung in die höhere Algebra, 2. Auflage Leipzig 1925, S. 282 ff.

[6]) A' bedeute die aus A durch Transposition hervorgehende Matrix. Ein Produkt $p'q$ zweier Vektormatrizen p und q enthält in der linken oberen Ecke das Skalarprodukt $p_1q_1 + \cdots + p_nq_n$, sonst lauter Nullen.

Ist nämlich λ ein — stets reeller — Eigenwert der reellen symmetrischen Matrix $M'M$, $x \neq 0$ eine — stets reell wählbare — Lösung von $M'Mx = \lambda x$, so ist auch $y = Mx$ reell, also $\lambda x'x = x'M'Mx = y'y$, und folglich $\lambda = \dfrac{y_1^2 + \cdots + y_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

5. Der Jordanschen Normalform, deren einfacher Aufbau die Invarianten der Klasse sofort ersichtlich macht, lassen sich andere, ebenso brauchbare Normalformen zur Seite stellen, indem man zunächst die Felder $\mathfrak{F}_k$ in geeigneter Weise abändert. Ersetzt man z. B. in der Matrix $\mathfrak{T}_k$ die Elemente 1 durch beliebige, von Null verschiedene Zahlen und in den rechten Schrägreihen die Nullen durch irgendwelche Zahlen, so haben von der so erklärten Matrix $\mathfrak{T}_k^*$ die ersten, zweiten, dritten u. s. f. Potenzen die Rangzahlen $k-1$, $k-2$, $k-3$ u. s. f.; daher ist das Feld $\mathfrak{F}_k^* = \lambda_h \mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^*$ zu $\mathfrak{F}_k$ ähnlich und kann also an dessen Stelle verwandt werden.

Solche Felder erhält man z. B. durch den Ansatz, falls $\lambda_h \neq 0$:

$$\mathfrak{F}_k^* = \lambda_h(\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k), \text{ oder } \mathfrak{F}_k^* = \lambda_h \cdot \frac{\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k}{\mathfrak{E}_k - \mathfrak{T}_k},$$

oder $\mathfrak{F}_k^* = \lambda_h e^{u\mathfrak{T}_k} = \lambda_h \left\{ \mathfrak{E}_k + \dfrac{u}{1!}\mathfrak{T}_k + \dfrac{u^2}{2!}\mathfrak{T}_k^2 + \cdots \right\}$, wo $u \neq 0$ irgendeine Zahl.

Eine zweite Abänderung, von der später (§§ 4, 5) viel Gebrauch gemacht wird, besteht darin, daß man die Reihenfolge der Felder vertauscht und etwa zwei von ihnen mit gleicher Elementenzahl k^2 — aus gleichen oder verschiedenen Ländern — zu einem Doppelfelde zusammenfaßt:

$$\mathfrak{F}_{h,k} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{F}_k^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{F}_k^{(2)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k \end{array}\right)$$

und dieses nötigenfalls noch durch ein ähnliches Feld von $(2k)^2$ Elementen ersetzt.

§ 2. Die Eigenwerte und Feldzahlen alternierender und orthogonaler Matrizen.

6. Ist M eine alternierende Matrix, also $M' = -M$, so gestattet ihre charakteristische Funktion bekanntlich die Zerlegung:

(1) $f(\xi) = |\xi E - M| = \xi^{r_0}(\xi^2 - \lambda_1^2)^{r_1} \cdots (\xi^2 - \lambda_s^2)^{r_s}$, $n = r_0 + 2(r_1 + \cdots + r_s)$.

Für jedes positive ganzzahlige k ist nun:

(2) $\{(M - \lambda_h E)^k\}' = (-M - \lambda_h E)^k = (-1)^k (M + \lambda_h E)^k$, $h = 1, 2, \ldots, s$,

und daher haben die Matrizen $(M - \lambda_h E)^k$ und $(M + \lambda_h E)^k$ denselben Rang; somit gehören zu den Eigenwerten λ_h, $-\lambda_h$ dieselben Feldzahlen $\delta_{h,1}, \delta_{h,2}, \ldots, \delta_{h,\varrho_h}$. Sind ferner $n - \tau_{0,1}$, $n - \tau_{0,2}$, $\ldots$, $n - \tau_{0,\varrho_0}$ die Rangzahlen der Potenzen $M, M^2, \ldots, M^{\varrho_0}$, ϱ_0 der charakteristische Exponent der Matrix M (ist $|M| \neq 0$, so ist $\varrho_0 = 0$, $\tau_{0,1} = \tau_{0,2} = \cdots = 0$), so folgt aus dem Umstande, daß die ungeraden Potenzen $M, M^3, M^5, \ldots$ selbst Alternanten sind, sofort, daß die Zahlen $n - \tau_{0,1}, n - \tau_{0,3}, n - \tau_{0,5}, \ldots$ alle gerade sein müssen. Da nun nach § 1 (6):

(3) $\delta_{0,\mu} = -\tau_{0,\mu+1} + 2\tau_{0,\mu} - \tau_{0,\mu-1} = (n - \tau_{0,\mu+1}) - 2(n - \tau_{0,\mu}) + (n - \tau_{0,\mu-1})$,

so ergibt sich, daß die Zahlen $\delta_{0,2}, \delta_{0,4}, \delta_{0,6}, \ldots$ sämtlich gerade sind (die Null wird zu den geraden Zahlen gerechnet).

Hiermit ist bewiesen:

Satz VI. *Die von Null verschiedenen Eigenwerte einer alternierenden Matrix treten stets in Paaren* $\pm \lambda_h (h = 1, 2, \ldots, s)$ *auf; zu jedem Paar* $\pm \lambda_h$ *gehören dieselben Feldzahlen* $\delta_{h,1}, \delta_{h,2}, \ldots, \delta_{h,\varrho_h}$. *Zu dem Eigenwerte* 0 *dagegen* (bei ungeradem n ist er stets

vorhanden) *gehören Feldzahlen* $\delta_{0,1}, \delta_{0,2}, \ldots, \delta_{0,\varrho_0}$, *von denen die Zahlen* $\delta_{0,2}, \delta_{0,4}, \ldots$ *gerade Zahlen sind.*

Das ist aber der Inhalt des Satzes von Kronecker[7]), übertragen auf die Elementarteiler der charakteristischen Determinante einer alternierenden Matrix. Erheblich umständlicher gestaltet sich die Herleitung des analogen Satzes[8]) für orthogonale Matrizen, zu der wir jetzt übergehen.

7. Die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix $M(MM' = E)$ treten stets in Paaren $\lambda_h, \lambda_h^{-1}$ auf. Nun besteht die Identität:

$$(4) \quad (M - \lambda_h E)^k = \{\lambda_h M(\lambda_h^{-1}E - M')\}^k = (-\lambda_h)^k M^k\{(M - \lambda_h^{-1}E)^k\}',$$

und daher haben die Potenzen $(M - \lambda_h E)^k$, $(M - \lambda_h^{-1}E)^k$ für alle ganzzahligen $k > 0$ denselben Rang. Infolgedessen gehören zu den Eigenwerten $\lambda_h, \lambda_h^{-1}$ dieselben Feldzahlen $\delta_{h,1}, \delta_{h,2}, \ldots, \delta_{h,\varrho_h}$, eine Tatsache, die für $\lambda_h^2 = 1$ trivial ist.

Hat nun aber M einen der Eigenwerte $+1$, -1, er sei mit ε bezeichnet, so ist also $|M - \varepsilon E| = 0$, $|M + \varepsilon E| \neq 0$, und es gilt die Gleichung:

$$(5) \qquad (M - M')^k = M'^k(M - \varepsilon E)^k(M + \varepsilon E)^k, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Da aber auf der linken Seite für $k = 1, 3, 5, \ldots$ eine Alternante steht, deren Rang ja immer eine gerade Zahl ist, so gilt dies auch für die ungeraden Potenzen von $M - \varepsilon E$. Dann folgt aber wie in Nr. 6, daß unter den zum Eigenwerte ε gehörenden Feldzahlen die zweite, vierte, usw. gerade Zahlen sind.

Diese Schlußweise versagt, wenn M beide Eigenwerte ± 1 hat. Hier kann man aus der Gleichung (5), die nun in die Form:

$$(5\,a) \qquad (M - M')^k = M'^k(M - E)^k(M + E)^k$$

übergeht, nach einem Satze von *Weyr*[9]) nur folgendes schließen: Ist $n - \tau_{1,k}$ der Rang von $(M - E)^k$, $n - \tau_{2,k}$ der von $(M + E)^k$, so hat $(M - M')^k$ den Rang $n - \tau_{1,k} - \tau_{2,k}$, und folglich sind die Zahlen

$$(6) \qquad n - \tau_{1,1} - \tau_{2,1}, \; n - \tau_{1,3} - \tau_{2,3}, \text{ u. s. f.}$$

sämtlich gerade. Bedenkt man, daß in diesem Falle die charakteristische Funktion die Zerlegung:

$$(7) \quad f(\xi) = |\xi E - M| = (\xi - 1)^{r_1}(\xi + 1)^{r_2}(\xi - \lambda_3)^{r_3}(\xi - \lambda_3^{-1})^{r_3} \cdots (\xi - \lambda_s)^{r_s}(\xi - \lambda_s^{-1})^{r_s}$$

gestattet, bei der $r_1 r_2 \neq 0$, $\lambda_h^2 \neq 1$ $(h = 3, 4, \ldots, s)$ und

$$(8) \qquad n = r_1 + r_2 + 2(r_3 + \cdots + r_s),$$

so ist $n - r_1 - r_2$ gerade (oder Null), und daher sind nach (6) auch die Zahlen

$$(9) \qquad r_1 - \tau_{1,1} + r_2 - \tau_{2,1}, \; r_1 - \tau_{1,3} + r_2 - \tau_{2,3}, \text{ u. s. f.}$$

sämtlich gerade. Gelingt es nun zu zeigen, daß die Zahlen $r_1 - \tau_{1,1}, r_1 - \tau_{1,3}$, u. s. f. selbst alle gerade sind, woraus dann das gleiche für die Zahlen $r_2 - \tau_{2,1}, r_2 - \tau_{2,3}$ usw. sich ergibt, so folgt wie in Nr. 6 — man hat nur in Formel (3) r_1 bzw. r_2 statt n zu schreiben —, daß von den zu den Eigenwerten $+1$ und -1 gehörenden Feldzahlen die zweiten, vierten usw. gerade sind. Damit wäre dann der in Rede stehende Satz mit unseren Hilfsmitteln bewiesen; man kann ihn so aussprechen:

Satz VII. *Die von* ± 1 *verschiedenen Eigenwerte einer orthogonalen Matrix treten stets in Paaren* $\lambda_h, \lambda_h^{-1}$ *auf, und zu jedem solchen Paare gehören dieselben Feldzahlen* $\delta_{h,1}, \ldots, \delta_{h,\varrho_h}$. *Dagegen gehören zu den Eigenwerten* $+1$ *bzw.* -1 — falls sie auftreten —

---

[7]) [L. 5.] S. 140 f. Man findet in dieser zusammenfassenden Darstellung die Originalliteratur zitiert.

[8]) [L. 5.] S. 169 f.

[9]) Vgl. [L. 4.] § 2, wo die Abhandlung von *E. Weyr* zitiert ist.

Feldzahlen $\delta_{0,1}, \delta_{0,2}, \ldots, \delta_{0,\varrho_0}$ *bzw.* $\bar{\delta}_{0,1}, \bar{\delta}_{0,2}, \ldots, \bar{\delta}_{0,\bar{\varrho}_0}$, *von denen jeweils die zweite, vierte, usw. gerade Zahlen sind.*

8. Die Durchführung des angekündigten Beweises stützt sich auf die Bezeichnungen und Sätze von § 1. Es besteht die eindeutige Partialbruchzerlegung [10]):

$$\frac{1}{\varphi(\xi)} = \frac{\psi_1(\xi)}{(\xi-\lambda_1)^{\varrho_1}} + \cdots + \frac{\psi_s(\xi)}{(\xi-\lambda_s)^{\varrho_s}}, \tag{10}$$

bei der die Polynome $\psi_h(\xi)$ in ξ höchstens vom Grade $\varrho_h - 1$ sind.
Setzt man nun für $h = 1, 2, \ldots, s$

$$\varphi_h(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-\lambda_h)^{\varrho_h}} \quad \text{und} \quad \Phi_h(\xi) = \varphi_h(\xi)\,\psi_h(\xi), \tag{11}$$

so ist $\Phi_h(\xi)$ in ξ höchstens vom Grade $\varrho - 1$, und da nun nach (10)

$$\Phi_1(\xi) + \cdots + \Phi_s(\xi) = 1, \tag{12}$$

so folgt hieraus und aus (11):

$$\Phi_h(\lambda_h) = 1, \ \Phi_h(\lambda_k) = 0 \text{ für } h \neq k, \tag{13}$$

so daß $\Phi_h(\xi)$ durch $\varphi(\xi)$ nicht teilbar ist; dagegen ist für $h \neq k$ $\Phi_h(\xi)\,\Phi_k(\xi)$ durch $\varphi(\xi)$ teilbar.

Erklärt man ferner das Polynom

$$\Theta_h(\xi) = (\xi - \lambda_h)\,\Phi_h(\xi), \quad \text{so ist} \tag{14}$$

$$\Theta_h(\lambda_1) = \Theta_h(\lambda_2) = \cdots = \Theta_h(\lambda_s) = 0, \quad \text{und} \quad (\Theta_h(\xi))^{\varrho_h}, \tag{15}$$

aber keine niedrigere Potenz, durch $\varphi(\xi)$ teilbar.

Ersetzt man nun in sämtlichen Polynomen die Potenzen $\xi^0 = 1, \xi, \xi^2, \xi^3$ usw. der Variabeln durch die Potenzen $M^0 = E, M, M^2, M^3$ usw., so erhält man nach (13) die Matrizen

$$P_h \equiv \Phi_h(M) \neq 0, \tag{16}$$

die nach (12) den Gleichungen

$$P_1 + \cdots + P_s = E, \quad P_h P_k = 0 \ (h \neq k), \quad P_h^2 = P_h, \tag{17}$$

genügen, sowie nach (14) die Matrizen

$$Q_h \equiv \Theta_h(M) = (M - \lambda_h E)\,P_h \neq 0, \ Q_h^2 \neq 0, \ldots, Q_h^{\varrho_h - 1} \neq 0, \ Q_h^{\varrho_h} = 0. \tag{18}$$

Nun ist nach einem bekannten Satze [11]):

$$|\xi E - P_h| = (\xi - 1)^{r_h}\,\xi^{n-r_h}, \ |\xi E - Q_h| = \xi^n. \tag{19}$$

Da nun nach (17) $P_h(P_h - E) = 0$, kann P_h keiner Gleichung niedrigeren Grades genügen, folglich hat P_h den charakteristischen Exponenten 1 und nach (19) den Rang r_h.

Ferner ist nach (18) und (19) $Q_h^{\varrho_h} = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der Q_h genügt, also ϱ_h der charakteristische Exponent von Q_h. Nun sind die Polynome $(\xi - \lambda_h)^\mu$ und $\Phi_h(\xi)$ teilerfremd, und nach dem Satze von Weyr (vgl. Anmerkung [9])) hat die Potenz

$$Q_h^\mu = (M - \lambda_h E)^\mu P_h \text{ den Rang } n - \tau_{h,\mu} - (n - r_h) = r_h - \tau_{h,\mu} = \tau_{h,\varrho_h} - \tau_{h,\mu}, \tag{20}$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, \varrho_h.$$

Ist nun die Matrix M orthogonal, mit den Eigenwerten $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$, so hat ihre reduzierte charakteristische Funktion die Form:

$$\varphi(\xi) = (\xi-1)^{\varrho_1}(\xi+1)^{\varrho_2}(\xi-\lambda_3)^{\varrho_3}(\xi-\lambda_3^{-1})^{\varrho_3}\cdots(\xi-\lambda_s)^{\varrho_s}(\xi-\lambda_s^{-1})^{\varrho_s}, \tag{21}$$
$$\varrho_1 + \varrho_2 + 2(\varrho_3 + \cdots + \varrho_s) \equiv \varrho$$

---

[10]) Vgl. für das Folgende [L. 2.] § 3 und [L. 6.] S. 232 f.
[11]) [L. 5.] S. 33.

und genügt der Funktionalgleichung:

$$\xi^{\varrho}\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right) = (-1)^{\varrho_1}\varphi(\xi), \text{ woraus } \xi^{\varrho-\varrho_1}\varphi_1\left(\frac{1}{\xi}\right) = \varphi_1(\xi) \tag{22}$$

folgt. Nach (11) ist daher $\xi^{\varrho-1}\Phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right) = \varphi_1(\xi)\cdot\xi^{\varrho_1-1}\psi_1\left(\frac{1}{\xi}\right)$, und somit das Polynom

$$F(\xi) = \xi^{\varrho-1}\left\{\Phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right) - \Phi_1(\xi)\right\} \tag{23}$$

durch $\varphi_1(\xi)$ teilbar. Nach (12) enthalten die Polynome $\xi^{\varrho-1}\{\Phi_1(\xi)-1\}$ und daher auch $\xi^{\varrho-1}\left\{\Phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right)-1\right\}$ den Faktor $(\xi-1)^{\varrho_1}$, also auch ihre Differenz $F(\xi)$, die sonach durch $\varphi(\xi)$ teilbar ist. Infolgedessen besteht die Gleichung $M^{\varrho-1}\{\Phi_1(M^{-1}) - \Phi_1(M)\} = 0$, und da $M^{-1} = M'$, so folgt hieraus nach (16):

$$P_1' = P_1. \tag{24}$$

Da nun nach (18) $Q_1 = (M-E)P_1$, so folgt:

$$Q_1 + Q_1' + Q_1Q_1' = \{M - E + M' - E + (M-E)(M'-E)\}P_1 = 0,$$

und diese Gleichung läßt sich umformen in $Q_1(2E+Q_1') + Q_1'(2E+Q_1) = 0$ und besagt, daß die Matrix

$$R \equiv Q_1(2E+Q_1') \tag{25}$$

eine Alternante ist. Da nun nach (19) $|2E+Q_1'| = |2E+Q_1| = 2^n \neq 0$ und ferner $R^{\mu} = Q_1^{\mu}(2E+Q_1')^{\mu}$, so haben die Potenzen Q_1^{μ} und R^{μ} gleichen Rang, und folglich sind die Rangzahlen der Potenzen Q_1, Q_1^3, Q_1^5 usw., also nach (20) die Zahlen $r_1 - \tau_{1,1}$, $r_1 - \tau_{1,3}$, $r_1 - \tau_{1,5}$, u. s. f. gerade Zahlen. Hiermit ist dann die Lücke in dem Beweise des Satzes III ausgefüllt [12]).

9. Die Sätze VI und VII, die bei reellen Matrizen durch die Sätze III und IV zu ergänzen sind, enthalten für die Eigenwerte und Feldzahlen alternierender bzw. orthogonaler Matrizen notwendige Bedingungen. Es wird nun zu zeigen sein, daß diese Bedingungen auch hinreichen, und das geschieht durch explizite Aufstellung von alternierenden bzw. orthogonalen Matrizen, deren Eigenwerte und Feldzahlen den genannten Sätzen entsprechend beliebig angenommen sind. Zuvor aber sei, gleichzeitig auch zur Bereitstellung der später erforderlichen Hilfsmittel, der Nachweis erbracht, daß für *jede* Matrix an Stelle der Jordanschen eine *symmetrische Normalform* angegeben werden kann.

§ 3. Die symmetrische Normalform einer Matrix.

10. Ist $\mathfrak{M}$ die Jordansche Normalform einer Klasse $\mathfrak{K}_M$, so führt die Frage nach den in der Klasse etwa enthaltenen symmetrischen Matrizen auf die Aufgabe, eine reguläre Matrix U zu finden, welche der Gleichung $U\mathfrak{M}U^{-1} = U'^{-1}\mathfrak{M}'U'$ genügt, aus der sich sofort die zweite ergibt: $V\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'V$, wenn man $U'U = V = V'$ setzt. Man hat also jetzt eine symmetrische Matrix V so zu bestimmen, daß $V\mathfrak{M}$ selbst symmetrisch wird, und dann V in das Produkt $U'U$ zu zerlegen.

Um wenigstens zu irgendeiner Lösung zu kommen, wird man einmal annehmen, V zerfalle in Länder und Felder derselben Ordnung und Reihenfolge wie $\mathfrak{M}$, und hat dann jedes Feld $\mathfrak{F}_k$ mit einer symmetrischen Matrix $\mathfrak{V}_k$ gleicher Ordnung so zu multiplizieren, daß das Produkt $\mathfrak{V}_k\mathfrak{F}_k$ symmetrisch ist. Benutzt man nun wie in § 1 (11) die Zerlegung $\mathfrak{F}_k = \lambda_k\mathfrak{E}_k + \varrho\mathfrak{T}_k$ [13]), so führt das schließlich auf die Aufgabe, die Matrix $\mathfrak{V}_k$ aus der

[12]) Die interessanten Relationen, welche für die Matrizen $P_2, \ldots, P_s$, $Q_2, \ldots, Q_s$ gelten, sollen hier nicht näher untersucht werden.

[13]) Über den zunächst beliebigen Zahlenfaktor ϱ wird in Formel (9 a) verfügt.

Gleichung $\mathfrak{V}_k \mathfrak{T}_k = \mathfrak{T}_k' \mathfrak{V}_k$ zu bestimmen. Eine solche spezielle Lösung erhält man aber durch die Annahme:

$$(1) \qquad \mathfrak{V}_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdot & & 1 & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 1 & & \cdot \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die quadratische Matrix $\mathfrak{V}_k$ aus k^2 Elementen besteht und in der von rechts oben nach links unten laufenden Diagonale das Element 1, sonst nur Nullen enthält. Es ist

$$(2) \qquad \mathfrak{V}_k \mathfrak{T}_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & \iddots & & \\ & \iddots & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{T}_k \mathfrak{V}_k = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & \\ & \iddots & & \\ \iddots & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. die Produkte sind, wie verlangt, symmetrisch, und es gelten die Gleichungen:

$$(3) \qquad \mathfrak{V}_k = \mathfrak{V}_k', \quad \mathfrak{V}_k^2 = \mathfrak{E}_k, \quad \mathfrak{V}_k \mathfrak{T}_k = \mathfrak{T}_k' \mathfrak{V}_k, \quad \mathfrak{T}_k \mathfrak{V}_k = \mathfrak{V}_k \mathfrak{T}_k',$$

und daher auch die beiden folgenden:

$$(4) \qquad \mathfrak{V}_k \mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}_k' \mathfrak{V}_k, \quad \mathfrak{F}_k \mathfrak{V}_k = \mathfrak{V}_k \mathfrak{F}_k'.$$

Ersetzt man in der Matrix $\mathfrak{M}$ die Felder $\mathfrak{F}_k$ (einerlei, welchen Eigenwert sie enthalten) durch die Felder $\mathfrak{V}_k$ und nennt die so entstandene Matrix V, so genügt sie den Gleichungen:

$$(5) \qquad V = V', \quad V^2 = E, \quad V\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' V, \quad \mathfrak{M} V = V \mathfrak{M}',$$

und ist also eine symmetrische Matrix, deren Produkt mit $\mathfrak{M}$ selbst symmetrisch ist.

Um nun zu der gewünschten Produktdarstellung $V = U'U$ zu kommen, wird man versuchsweise $U' = U$ annehmen; die so entstehende Gleichung $V = U^2$ wird man nach einem Satze von Frobenius[14]) durch den Ansatz $U = \alpha E + \beta V$ zu lösen versuchen, und findet dann mit Rücksicht auf (5):

$$(6) \qquad U = U' = E - iV, \quad U^2 = -2iV\,^{15}), \quad U^{-1} = \tfrac{1}{2}(E + iV).$$

Hieraus folgt dann nach (5) $U^2 \mathfrak{M} = \mathfrak{M}' U^2$, oder $U \mathfrak{M} U^{-1} = U'^{-1} \mathfrak{M}' U' \equiv \Sigma = \Sigma'$, d. h. *die symmetrische Matrix Σ gehört der Klasse $\mathfrak{K}_M$ an.* Ist nun Ω eine beliebige orthogonale Matrix, so ist auch $\Sigma_1 = \Omega \Sigma \Omega'$ eine symmetrische Matrix der Klasse; umgekehrt besteht zwischen zwei symmetrischen Matrizen Σ_1, Σ einer Klasse stets eine Beziehung der Form $\Sigma_1 = \Omega \Sigma \Omega'$[16]), wo Ω orthogonal ist, d. h. beide Matrizen sind auch kongruent, sie sollen dann als „orthogonal-ähnlich“[17]) bezeichnet werden. Somit folgt:

Satz VIII. *In jeder Matrizenklasse ist eine Unterklasse orthogonal-ähnlicher symmetrischer Matrizen enthalten.*

11. Zur expliziten Darstellung der Matrix Σ, welche als *symmetrische Normalform der Klasse* dienen kann, beachte man, daß nach (6) U, und damit auch Σ in Felder $\mathfrak{U}_k$ bzw. Σ_k von gleicher Reihenfolge und Ordnung wie $\mathfrak{M}$ zerfallen, zwischen denen nach (6) die Relationen gelten:

$$(7) \qquad \mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_k' = \mathfrak{E}_k - i\mathfrak{V}_k, \quad \mathfrak{U}_k^2 = -2i\mathfrak{V}_k, \quad \mathfrak{U}_k^{-1} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_k + i\mathfrak{V}_k),$$

---

[14]) [L. 1.] § 1 oder [L. 6.] S. 37.

[15]) Das Auftreten des Faktors $-2i$ erweist sich sogleich als unwesentlich.

[16]) [L. 1.] § 3.

[17]) Hier wäre ein kürzerer, prägnanterer Ausdruck erwünscht, der sich der übrigen — nun einmal gebräuchlich gewordenen — Terminologie anpaßt.

$$\Sigma_k = \Sigma_k' = \mathfrak{U}_k \mathfrak{F}_k \mathfrak{U}_k^{-1} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_k - i\mathfrak{V}_k)\,\mathfrak{F}_k\,(\mathfrak{E}_k + i\mathfrak{V}_k). \tag{8}$$

Nimmt man nun, um den Zahlenfaktor $\frac{1}{2}$ wegzubringen,

$$\mathfrak{F}_k = \lambda_h \mathfrak{E}_k + 2\mathfrak{T}_k, \tag{9 a}$$

so geht (8) über in die endgültige Form:

$$\Sigma_k = \lambda_h \mathfrak{E}_k + \mathsf{T}_k, \tag{9}$$

wo die zu $\mathfrak{T}_k$ ähnliche symmetrische Matrix T_k durch die Formel

$$\mathsf{T}_k = \mathfrak{T}_k + \mathfrak{T}_k' + i(\mathfrak{T}_k \mathfrak{V}_k - \mathfrak{V}_k \mathfrak{T}_k) \tag{10}$$

erklärt ist. Damit folgt aber:

Satz IX. *Ersetzt man in $\mathfrak{M}$ die Felder $\mathfrak{F}_k$ durch die Felder Σ_k, so erhält man eine symmetrische Normalform der Klasse.*

Hier ist z. B.

$$\mathsf{T}_1 = (0),\quad \mathsf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix},\quad \mathsf{T}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 1+i & 0 & -i \\ 0 & 1+i & 0 & 1-i & 0 \\ i & 0 & 1-i & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{11 a}$$

$$\mathsf{T}_2 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix},\quad \mathsf{T}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & 1 \\ 0 & -i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11 b}$$

und man sieht, wie sich die Matrizen ungerader bzw. gerader Ordnung je durch Ränderung auseinander ableiten lassen.

Man kann, durch geeignete Änderung von $\mathfrak{T}_k$, erreichen, daß in den Matrizen T_3, T_5, u. s. f. das gemeinsame innere Quadrat, d. h. die Matrix T_3, die einfachere Form

$$\mathsf{T}_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

annimmt, ohne daß an den Rändern bei T_5, T_7, u. s. f. etwas geändert wird. Ist $\lambda_h \neq 0$, so kann man das Feld Σ_k durch $\lambda_h(\mathfrak{E}_k + \mathsf{T}_k)$ ersetzen.

§ 4. Alternierende Normalformen.

12. Es sei $\mathfrak{K}_M$ eine Matrizenklasse, deren Eigenwerte und Feldzahlen den Bedingungen des Satzes VI genügen, $\mathfrak{M}$ ihre Jordansche Normalform. Soll nun in der Klasse eine Alternante $A = -A'$ vorkommen, so muß $A = U\mathfrak{M}U^{-1}$ sein, die Matrix U der Gleichung $U\mathfrak{M}U^{-1} + U'^{-1}\mathfrak{M}'U' = 0$ genügen, die in $V\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'V = 0$ übergeht, wenn man $U'U = V = V'$ setzt. Man hat also zunächst die symmetrische Matrix V so zu bestimmen, daß $V\,\mathfrak{M}$ eine Alternante wird, und dann V in ein Produkt $V = U'U$ zu zerlegen.

Würde man nun, wie in § 3, annehmen, daß U und V in gleicher Weise wie $\mathfrak{M}$ zerfallen, so entstünde die Aufgabe, zu jedem Felde $\mathfrak{F}_k$ von $\mathfrak{M}$ ein ähnliches alternierendes zu finden; sie ist aber nur lösbar, wenn $\mathfrak{F}_k$ schon den Bedingungen des Satzes VI genügt, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Man muß daher zunächst die Länder und Felder von $\mathfrak{M}$ in folgender Weise umordnen (vgl. Nr. 5):

Zunächst erkläre man die Felder:

$$(1)\quad \mathfrak{T}_1^* = 2[0],\quad \mathfrak{T}_3^* = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{T}_\varrho^* = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & 0 & -1 & \\ & & & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \cdot & -1 \\ & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & & \cdot -1 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},\quad \varrho = 3, 5 \ldots$$

die offensichtlich zu den Feldern $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_5$, u. s. f. ähnlich sind. Sodann bedeute $\mathfrak{T}_{kk}$ ein quadratisches Doppelfeld aus $(2k)^2$ Elementen:

$$(2)\qquad \mathfrak{T}_{kk} = 2\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{T}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathfrak{T}_k \end{array}\right),$$

das ersichtlich zu dem Doppelfelde $\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{T}_k & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{T}_k \end{array}\right)$ ähnlich ist. Schließlich erkläre man, falls $\lambda_h \neq 0$, das Doppelfeld:

$$(3)\quad \mathfrak{F}_{kk} = \lambda_h\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{E}_k + 2\mathfrak{T}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathfrak{E}_k - 2\mathfrak{T}_k \end{array}\right),\ \text{oder auch}\ \mathfrak{F}_{kk} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_h\mathfrak{E}_k + 2\mathfrak{T}_k & 0 \\ \hline 0 & -\lambda_h\mathfrak{E}_k - 2\mathfrak{T}_k \end{array}\right);$$

beide sind zu dem Doppelfelde $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_h\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k & 0 \\ \hline 0 & -\lambda_h\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k \end{array}\right)$ ähnlich.

Nun fasse man die Felder folgendermaßen zu Ländern zusammen:

$$(4)\quad \mathfrak{L}_0 = \langle \underbrace{\mathfrak{T}_1^*, \ldots, \mathfrak{T}_1^*}_{\delta_{0,1}};\ \underbrace{\mathfrak{T}_{22}, \ldots, \mathfrak{T}_{22}}_{\frac{1}{2}\delta_{0,2}};\ \underbrace{\mathfrak{T}_3^*, \ldots, \mathfrak{T}_3^*}_{\delta_{0,3}};\ \underbrace{\mathfrak{T}_{44}, \ldots, \mathfrak{T}_{44}}_{\frac{1}{2}\delta_{0,4}};\ \text{u. s. f.}\rangle$$

$$(5)\quad \mathfrak{L}_{hh} = \langle \underbrace{\mathfrak{F}_{11}, \ldots, \mathfrak{F}_{11}}_{\delta_{h,1}};\ \underbrace{\mathfrak{F}_{22}, \ldots, \mathfrak{F}_{22}}_{\delta_{h,2}};\ \ldots;\ \underbrace{\mathfrak{F}_{\varrho_h\varrho_h}, \ldots, \mathfrak{F}_{\varrho_h\varrho_h}}_{\delta_{h,\varrho_h}}\rangle \qquad h = 1, 2, \ldots, s,$$

und bilde aus den Ländern die Matrix

$$(6)\qquad \mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_{11}, \ldots, \mathfrak{L}_{ss}\rangle.$$

Das Land $\mathfrak{L}_0$ hat dann nur den Eigenwert 0 und die Feldzahlen $\delta_{0,1}$, $\delta_{0,2}, \ldots, \delta_{0,\varrho_0}$ — kommt der Eigenwert 0 nicht vor, dann sind $\delta_{0,1} = \delta_{0,2} = \cdots = 0$ zu setzen —, das Land $\mathfrak{L}_{hh}$ nur die Eigenwerte $+\lambda_h$, $-\lambda_h$ und zu beiden die Feldzahlen $\delta_{h,1}, \delta_{h,2}, \ldots, \delta_{h,\varrho_h}$; daher gehört die Matrix $\mathfrak{M}^*$ der Klasse $\mathfrak{K}_M$ an, sie soll nun $\mathfrak{M}$ ersetzen.

13. Überträgt man jetzt die Fragestellung, mit den vereinfachenden Annahmen über U und V, sinngemäß auf die Matrix $\mathfrak{M}^*$, so hat man zu deren Feldern ähnliche, alternierende Felder zu finden, und das geschieht nun folgendermaßen:

Man verwende die in § 3 (1) und (7) erklärten Felder $\mathfrak{V}_k$ und $\mathfrak{U}_k$; sodann definiere man die Doppelfelder:

$$(7)\qquad \mathfrak{E}_{kk} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{E}_k & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{E}_k \end{array}\right),\quad \mathfrak{V}_{kk} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathfrak{V}_k \\ \hline \mathfrak{V}_k & 0 \end{array}\right),\quad \mathfrak{U}_{kk} = \mathfrak{E}_{kk} - i\mathfrak{V}_{kk},$$

welche folgende Gleichungen erfüllen:

$$(8)\quad \mathfrak{V}_{kk} = \mathfrak{V}_{kk}',\quad \mathfrak{V}_{kk}^2 = \mathfrak{E}_{kk};\qquad \mathfrak{U}_{kk}^2 = -2i\mathfrak{V}_{kk},\quad \mathfrak{U}_{kk}^{-1} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_{kk} + i\mathfrak{V}_{kk}).$$

Schließlich erkläre man die Matrix

$$(9) \qquad \mathfrak{W}_{kk} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{V}_k \\ \mathfrak{V}_k & 0 \end{pmatrix} = -\mathfrak{W}'_{kk}, \quad \mathfrak{W}_{kk}^2 = -\mathfrak{E}_{kk}.$$

Bildet man nun die Produkte $\mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k^*$ und $\mathfrak{T}_k^*\mathfrak{V}_k$, so erweisen sie sich als Alternanten, genügen also den Beziehungen:

$$(10) \qquad \mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k^* + \mathfrak{T}_k'^*\mathfrak{V}_k = 0, \quad \mathfrak{T}_k^*\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k'^* = 0.$$

Weiterhin ist

$$(11) \quad \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{T}_{kk} = 2\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k \\ \mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{T}_{kk}\mathfrak{V}_{kk} = 2\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{T}_k\mathfrak{V}_k \\ -\mathfrak{T}_k\mathfrak{V}_k & 0 \end{pmatrix};$$

daher sind auch diese Produkte Alternanten; es ist (man beachte § 3 (3)):

$$(12) \qquad \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{T}_{kk} + \mathfrak{T}'_{kk}\mathfrak{V}_{kk} = 0, \quad \mathfrak{T}_{kk}\mathfrak{V}_{kk} + \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{T}'_{kk} = 0.$$

Schließlich ist, unter Berücksichtigung von (9) und (11):

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{F}_{kk} &= \lambda_h\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{V}_k - 2\mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k \\ \mathfrak{V}_k + 2\mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k & 0 \end{pmatrix} = \lambda_h(\mathfrak{W}_{kk} + \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{T}_{kk}), \\ \mathfrak{F}_{kk}\mathfrak{V}_{kk} &= \lambda_h\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{V}_k + 2\mathfrak{T}_k\mathfrak{V}_k \\ -\mathfrak{V}_k - 2\mathfrak{T}_k\mathfrak{V}_k & 0 \end{pmatrix} = \lambda_h(-\mathfrak{W}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk}\mathfrak{V}_{kk}), \end{aligned}$$

d. h. auch diese Produkte sind Alternanten, es ist also

$$(14) \qquad \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{F}_{kk} + \mathfrak{F}'_{kk}\mathfrak{V}_{kk} = 0, \quad \mathfrak{F}_{kk}\mathfrak{V}_{kk} + \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{F}'_{kk} = 0.$$

Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst: *Ersetzt man in* $\mathfrak{M}^*$ *die Felder* $\mathfrak{T}_k^*$ *durch* $\mathfrak{V}_k$, *die Felder* $\mathfrak{T}_{kk}$ *und* $\mathfrak{F}_{kk}$ (*einerlei, welche Eigenwerte sie enthalten*) *durch* $\mathfrak{V}_{kk}$ *und nennt die so entstandene Matrix* V, *so ist*

$$(15) \qquad V = V', \quad V^2 = E, \quad V\mathfrak{M}^* + \mathfrak{M}'^*V = 0,$$

d. h. das Produkt der symmetrischen Matrix V *mit* $\mathfrak{M}^*$ *ist eine Alternante.*

Bezeichnet nun U die Matrix, die aus V hervorgeht, wenn man die Felder $\mathfrak{V}_k$ und $\mathfrak{V}_{kk}$ durch $\mathfrak{U}_k$ bzw. $\mathfrak{U}_{kk}$ ersetzt, so ist also

$$(16) \qquad U = E - iV = U', \quad U^2 = -2iV,$$

daher folgt aus (15): $U^2\mathfrak{M}^* + \mathfrak{M}'^*U^2 = 0$, oder $U\mathfrak{M}^*U^{-1} + U'^{-1}\mathfrak{M}^*U' = 0$. Hiermit ist das beabsichtigte Resultat erreicht: *Die Alternante* $\mathsf{A} = U\mathfrak{M}^*U^{-1}$ *gehört der Klasse* $\mathfrak{K}_M$ *an.* Ist nun Ω eine beliebige orthogonale Matrix, so ist auch $\mathsf{A}_1 = \Omega\mathsf{A}\Omega'$ eine alternierende Matrix der Klasse, und umgekehrt besteht zwischen zwei Alternanten einer Klasse stets eine derartige Beziehung [18]). Daher folgt:

Satz X. *In jeder Matrizenklasse, und nur in solchen, deren Eigenwerte und Feldzahlen den Bedingungen des Satzes* VI *genügen, existiert eine Unterklasse orthogonal-ähnlicher Alternanten.*

14. Die Alternante $\mathsf{A} = U\mathfrak{M}^*U^{-1}$, die als *Normalform der Klasse* verwendet werden kann, zerfällt in gleicher Weise wie $\mathfrak{M}^*$, U, V. Ihre Felder lassen sich folgendermaßen erklären:

Zunächst hat man die zu den $\mathfrak{T}_k^*$ ähnlichen Felder:

$$(17) \quad \mathsf{A}_k = \mathfrak{U}_k\mathfrak{T}_k^*\mathfrak{U}_k^{-1} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{T}_k^* - \mathfrak{T}_k'^* + i(\mathfrak{T}_k^*\mathfrak{V}_k - \mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k^*)\} = -\mathsf{A}_k'.$$

Z. B. ist

[18]) [L. 1.] § 3.

$$(18)\qquad \mathsf{A}_1 = (0),\quad \mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ -(1+i) & 0 & -(1-i) \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 1+i & 0 & i \\ 0 & -(1+i) & 0 & -(1-i) & 0 \\ -i & 0 & 1-i & 0 & -1 \\ 0 & -i & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier kann man noch, durch Abänderung von $\mathfrak{T}_k^*$, erreichen, daß in A_3, A_5, u. s. f. das innere, allen Matrizen gemeinsame Quadrat die Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$ annimmt, ohne daß an den Rändern in A_5, A_7, usw. etwas geändert wird.

Ferner tritt auf das zu $\mathfrak{T}_{kk}$ ähnliche Feld:

$$(19)\qquad \mathsf{A}_{kk} = \mathfrak{U}_{kk}\mathfrak{T}_{kk}^{-}\mathfrak{U}_{kk}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{T}_k - \mathfrak{T}_k' & i(\mathfrak{T}_k\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k) \\ \hline -i(\mathfrak{T}_k\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_k\mathfrak{T}_k) & -\mathfrak{T}_k + \mathfrak{T}_k' \end{array}\right),$$

also z. B.

$$(20)\qquad \mathsf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \mathsf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -i & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 1 & i & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & -i & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar lassen sich die Felder A_k bzw. A_{kk} rekurrent ableiten.

Führt man noch, zu späterem Gebrauche, die Abkürzung

$$(21)\qquad \mathfrak{J}_{kk} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{E}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathfrak{E}_k \end{array}\right) = \mathfrak{J}_{kk}'$$

ein, so gelten die Formeln:

$$(22)\qquad \mathfrak{V}_{kk}\mathfrak{J}_{kk} = -\mathfrak{J}_{kk}\mathfrak{V}_{kk} = \mathfrak{W}_{kk},\quad \mathfrak{U}_{kk}\mathfrak{J}_{kk}\mathfrak{U}_{kk}^{-1} = -i\mathfrak{W}_{kk},$$

und da nun nach (3) das Feld $\mathfrak{F}_{kk}$ in einer der Formen

$$(23)\qquad \mathfrak{F}_{kk} = \lambda_h(\mathfrak{J}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk}) \text{ oder } \mathfrak{F}_{kk} = \lambda_h\mathfrak{J}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk}$$

geschrieben werden kann, so findet man die zu $\mathfrak{F}_{kk}$ ähnliche Alternante $\widetilde{\mathsf{A}}_{kk} = \mathfrak{U}_{kk}\mathfrak{F}_{kk}\mathfrak{U}_{kk}^{-1}$ in einer der Formen:

$$(24)\qquad \widetilde{\mathsf{A}}_{kk} = \lambda_h(-i\mathfrak{W}_{kk} + \mathsf{A}_{kk}) \text{ oder } \widetilde{\mathsf{A}}_{kk} = -i\lambda_h\mathfrak{W}_{kk} + \mathsf{A}_{kk}.$$

Zur expliziten Darstellung von A gilt nun der

Satz XI. *Ersetzt man in* $\mathfrak{M}^*$ (vgl. (4)—(6)) *die Felder* $\mathfrak{T}_k$, $\mathfrak{T}_{kk}$, $\mathfrak{F}_{kk}$ *durch die Felder* A_k *bzw.* A_{kk} *bzw.* $\widetilde{\mathsf{A}}_{kk}$, *so erhält man die alternierende Normalform* A *der Klasse.*

Soll die Klasse eine reelle Alternante enthalten, so können nach Satz III *in* $\mathfrak{M}^*$ *nur die Felder* $\mathfrak{T}_1^*$ *und* $\mathfrak{F}_{11}$, *also in* A *nur die Felder* $\mathsf{A}_1 = (0)$, $\widetilde{\mathsf{A}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda_h \\ -i\lambda_h & 0 \end{pmatrix}$ *auftreten, wobei die Eigenwerte* λ_h *rein imaginär sind.*

§ 5. Orthogonale Normalformen.

15. Der Satz VII gibt die Bedingungen an, die für das Auftreten einer orthogonalen Matrix in einer Klasse notwendig sind; daß sie auch dafür hinreichen, soll nun gezeigt werden. Zu diesem Zwecke wird die Jordansche Normalform $\mathfrak{M}$ der Klasse durch eine andere ersetzt, deren einzelne Felder schon den Bedingungen des Satzes VII genügen, sodann wird zu jedem Felde ein ähnliches, aber orthogonales Feld angegeben werden; hierbei bedient man sich der Darstellung einer orthogonalen Matrix mittels einer Alternante A durch eine der Formen e^A oder $\dfrac{E+A}{E-A}$.

Man verwendet die in § 4 (1), (2) erklärten Felder $\mathfrak{T}_k^*$ und $\mathfrak{T}_{kk}$ und die dort eingeführten Bezeichnungen. Außerdem setzt man für $\lambda_h^2 \neq 1$:

$$\lambda_h = e^{i\varphi_h},\ \lambda_h^{-1} = e^{-i\varphi_h},\ \varphi_h \neq 0, \neq \pi. \tag{1}$$

Infolge der Beziehung $\mathfrak{T}_k^k = 0$ sind die Matrizen $e^{i\varphi_h \mathfrak{E}_k + 2\mathfrak{T}_k} = e^{i\varphi_h}(\mathfrak{E}_k + 2\mathfrak{T}_k + \cdots)$ und $e^{i\varphi_h}(\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k)(\mathfrak{E}_k - \mathfrak{T}_k)^{-1} = e^{i\varphi_h}(\mathfrak{E}_k + 2\mathfrak{T}_k + \cdots)$ Polynome in $\mathfrak{T}_k$ und nach dem in Nr. 5 Gesagten ähnlich zu dem Felde $e^{i\varphi_h}\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k$. Hieraus ersieht man, daß zu dem Doppelfelde $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_h \mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k & 0 \\ \hline 0 & \lambda_h^{-1}\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k \end{array}\right)$ jedes der Doppelfelder

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk} = \left(\begin{array}{c|c} e^{i\varphi_h \mathfrak{E}_k + 2\mathfrak{T}_k} & 0 \\ \hline 0 & e^{-i\varphi_h \mathfrak{E}_k - 2\mathfrak{T}_k} \end{array}\right) = e^{i\varphi_h \mathfrak{J}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk}}, \tag{2 a}$$

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk} = \left(\begin{array}{c|c} e^{i\varphi_h}(\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k)(\mathfrak{E}_k - \mathfrak{T}_k)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-i\varphi_h}(\mathfrak{E}_k - \mathfrak{T}_k)(\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k)^{-1} \end{array}\right) \tag{2 b}$$

$$= e^{i\varphi_h \mathfrak{J}_{kk}}(\mathfrak{E}_{kk} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}_{kk})(\mathfrak{E}_{kk} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}_{kk})^{-1}$$

ähnlich ist. Man fasse nun die Felder $\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^*$, $\mathfrak{E}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk}$, $\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk}$ folgendermaßen in Länder zusammen:

$$\mathfrak{L}_0 = \langle \underbrace{(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{T}_1^*), \ldots, (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{T}_1^*)}_{\delta_{0,1}};\ \underbrace{(\mathfrak{E}_{22} + \mathfrak{T}_{22}), \ldots, (\mathfrak{E}_{22} + \mathfrak{T}_{22})}_{\frac{1}{2}\delta_{0,2}}; \tag{3}$$

$$\underbrace{(\mathfrak{E}_3 + \mathfrak{T}_3^*), \ldots, (\mathfrak{E}_3 + \mathfrak{T}_3^*)}_{\delta_{0,3}};\ \underbrace{(\mathfrak{E}_{44} + \mathfrak{T}_{44}), \ldots, (\mathfrak{E}_{44} + \mathfrak{T}_{44})}_{\frac{1}{2}\delta_{0,4}};\ \text{u. s. f.}\rangle$$

$$\bar{\mathfrak{L}}_0 = -\langle \underbrace{(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{T}_1^*), \ldots, (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{T}_1^*)}_{\bar{\delta}_{0,1}};\ \underbrace{(\mathfrak{E}_{22} + \mathfrak{T}_{22}), \ldots, (\mathfrak{E}_{22} + \mathfrak{T}_{22})}_{\frac{1}{2}\bar{\delta}_{0,2}}; \tag{4}$$

$$\underbrace{(\mathfrak{E}_3 + \mathfrak{T}_3^*), \ldots, (\mathfrak{E}_3 + \mathfrak{T}_3^*)}_{\bar{\delta}_{0,3}};\ \underbrace{(\mathfrak{E}_{44} + \mathfrak{T}_{44}), \ldots, (\mathfrak{E}_{44} + \mathfrak{T}_{44})}_{\frac{1}{2}\bar{\delta}_{0,4}};\ \text{u. s. f.}\rangle$$

$$\mathfrak{L}_{hh} = \langle \underbrace{\widetilde{\mathfrak{F}}_{11}, \ldots, \widetilde{\mathfrak{F}}_{11}}_{\delta_{h,1}};\ \underbrace{\widetilde{\mathfrak{F}}_{22}, \ldots, \widetilde{\mathfrak{F}}_{22}}_{\delta_{h,2}}; \ldots;\ \underbrace{\widetilde{\mathfrak{F}}_{\varrho_h \varrho_h}, \ldots, \widetilde{\mathfrak{F}}_{\varrho_h \varrho_h}}_{\delta_{h,\varrho_h}}\rangle \qquad h = 1, 2, \ldots, s, \tag{5}$$

und bilde aus den Ländern die Matrix:

$$\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{L}_0, \bar{\mathfrak{L}}_0, \mathfrak{L}_{11}, \ldots, \mathfrak{L}_{ss} \rangle \tag{6}$$

— kommt einer der Eigenwerte in $\mathfrak{K}_M$ nicht vor, so sind die zugehörigen Feldzahlen gleich Null zu setzen, das Land bleibt weg —. Das Land $\mathfrak{L}_0(\bar{\mathfrak{L}}_0)$ hat nur den Eigenwert $+1$ (-1) und die Feldzahlen $\delta_{0,1}$, $\delta_{0,2}$, usw. ($\bar{\delta}_{0,1}$, $\bar{\delta}_{0,2}$, usw.); das Land $\mathfrak{L}_{hh}$ hat nur die Eigenwerte λ_h, λ_h^{-1} und zu beiden die Feldzahlen $\delta_{h,1}$, $\delta_{h,2}$, usf. Daher gehört die Matrix $\mathfrak{M}^*$ der Klasse $\mathfrak{K}_M$ an und möge fortan $\mathfrak{M}$ ersetzen. Zu jedem Felde von $\mathfrak{M}^*$ soll nun ein ähnliches, orthogonales angegeben werden.

16. Nun sind nach § 4 (17) die Felder A_k und $\mathfrak{T}_k^*$ zueinander ähnlich, also auch die Felder $\Omega_k \equiv (\mathfrak{E}_k + \frac{1}{2}\mathsf{A}_k)(\mathfrak{E}_k - \frac{1}{2}\mathsf{A}_k)^{-1}$ und $(\mathfrak{E}_k + \frac{1}{2}\mathfrak{T}_k^*)(\mathfrak{E}_k - \frac{1}{2}\mathfrak{T}_k^*)^{-1} = \mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^* + \cdots$, und dieses letztere ist zu $\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^*$ ähnlich. Genau so schließt man, daß das Feld $\Omega_{kk} \equiv (\mathfrak{E}_{kk} + \frac{1}{2}\mathsf{A}_{kk})(\mathfrak{E}_{kk} - \frac{1}{2}\mathsf{A}_{kk})^{-1}$ zu dem Felde $\mathfrak{E}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk}$ ähnlich ist. Gleichzeitig sind Ω_k und Ω_{kk} orthogonal und Polynome in A:

$$\Omega_k \equiv \mathfrak{E}_k + \mathsf{A}_k + \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_k^2 + \tfrac{1}{4}\mathsf{A}_k^3 + \tfrac{1}{8}\mathsf{A}_k^4 + \cdots, \tag{7}$$

$$\Omega_{kk} \equiv \mathfrak{E}_{kk} + \mathsf{A}_{kk} + \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_{kk}^2 + \tfrac{1}{4}\mathsf{A}_{kk}^3 + \tfrac{1}{8}\mathsf{A}_{kk}^4 + \cdots. \tag{8}$$

Wählt man in (5) für $\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk}$ die Form (2 b), so folgt aus § 4 (19) und (22):

$$\widetilde{\Omega}_{kk} \equiv \mathfrak{U}_{kk}\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk}\mathfrak{U}_{kk}^{-1} = e^{\varphi_h \mathfrak{W}_{kk}} \cdot (\mathfrak{E}_{kk} + \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_{kk})(\mathfrak{E}_{kk} - \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_{kk})^{-1} = e^{\varphi_h \mathfrak{W}_{kk}} \cdot \Omega_{kk} = \Omega_{kk} \cdot e^{\varphi_h \mathfrak{W}_{kk}}. \tag{9}$$

Es ist aber, infolge der Beziehung $\mathfrak{W}_{kk}^2 = -\mathfrak{E}_{kk}$:

$$e^{\varphi_h \mathfrak{W}_{kk}} = \cos\varphi_h \cdot \mathfrak{E}_{kk} + \sin\varphi_h \cdot \mathfrak{W}_{kk}, \tag{10}$$

die Matrix ist orthogonal, und also auch die zu $\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk}$ ähnliche Matrix $\widetilde{\Omega}_{kk}$.

Damit ist das Ziel erreicht:

Satz XII. *Ersetzt man in der Matrix* $\mathfrak{M}^*$ ((3) — (6)) *die Felder* $(\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^*)$, $(\mathfrak{E}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk})$, $\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk}$ *durch die orthogonalen Felder* Ω_k, *bzw.* Ω_{kk}, *bzw.* $\widetilde{\Omega}_{kk}$, *so erhält man eine orthogonale Normalform* Ω *der Klasse* $\mathfrak{K}_M$.

Die Felder sind z. B.

$$\Omega_1 = \{1\}, \quad \Omega_3 = \begin{Vmatrix} 1-i, & 1+i, & -1 \\ -(1+i), & 1, & -(1-i) \\ -1, & 1-i, & 1+i \end{Vmatrix}, \tag{11 a}$$

$$\Omega_5 = \begin{Vmatrix} 1+i, & 1-i, & 1+i, & -(1-i), & 1 \\ -(1-i), & 1-i, & 1+i, & -1, & 1+i \\ 1+i, & -(1+i), & 1, & -(1-i), & 1-i \\ 1-i, & -1, & 1-i, & 1+i, & -(1+i) \\ 1, & -(1+i), & 1-i, & 1+i, & 1-i \end{Vmatrix};$$

$$\Omega_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \Omega_{22} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & i & 0 \\ -1 & 1 & 0 & i \\ -i & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -i & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{11 b}$$

$$\Omega_{33} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & i & i & 0 \\ -1 & 1 & 1 & i & 0 & i \\ 1 & -1 & 1 & 0 & i & -i \\ i & -i & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -i & 0 & -i & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -i & -i & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$e^{\varphi \mathfrak{W}_{11}} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}, \quad e^{\varphi \mathfrak{W}_{22}} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi \end{Vmatrix}. \tag{11 c}$$

Auch hier besteht offenbar die Möglichkeit einer rekurrenten Erklärung.

Soll die Klasse eine reelle orthogonale Matrix enthalten, so können nach Satz IV *in* Ω *nur die Felder* $\pm\Omega_1$ *und* $e^{\varphi_h \mathfrak{W}_{11}}$ *auftreten, wo* $\varphi_h \neq 0, \pi$ *reell ist.*

17. Man kann noch eine zweite Normalform der Klasse $\mathfrak{N}_M$ angeben, welche in engem Zusammenhang mit der Darstellung eingliedriger Gruppen orthogonaler Matrizen steht.

Da die Felder A_k und $\mathfrak{T}_k^*$ zueinander ähnlich sind, gilt dies auch von den Feldern e^{A_k} und $e^{\mathfrak{T}_k^*} = \mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^* + \cdots$, und dieses letztere ist wieder zu $\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^*$ ähnlich. Genau so schließt man für die Felder A_{kk} und $\mathfrak{T}_{kk}$ und erhält so zwei orthogonale Matrizen

$$\Gamma_k \equiv e^{\mathsf{A}_k}, \quad \Gamma_{kk} \equiv e^{\mathsf{A}_{kk}}, \tag{12}$$

die zu den Feldern $\mathfrak{E}_k + \mathfrak{T}_k^*$ bzw. $\mathfrak{E}_{kk} + \mathfrak{T}_{kk}$ ähnlich sind. Nimmt man nun in $\mathfrak{M}^*$ das Feld $\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk}$ nach der Erklärung (2 a) an, so folgt aus § 4 (19) und (22) sofort die Formel — man beachte, daß die Alternanten $\mathfrak{W}_{kk}$, A_{kk} vertauschbar sind —:

$$\widetilde{\Gamma}_{kk} \equiv \mathfrak{U}_{kk} \widetilde{\mathfrak{F}}_{kk} \mathfrak{U}_{kk}^{-1} = e^{\varphi_h \mathfrak{W}_{kk}} \cdot e^{\mathsf{A}_{kk}} = e^{\varphi_h \mathfrak{W}_{kk}} \cdot \Gamma_{kk}, \tag{13}$$

d. h. die orthogonale Matrix $\widetilde{\Gamma}_{kk}$ ist zu $\widetilde{\mathfrak{F}}_{kk}$ ähnlich.

Ersetzt man in der Normalform Ω des Satzes XII *die Felder Ω_k, Ω_{kk}, $\widetilde{\Omega}_{kk}$ durch die Felder Γ_k, bzw. Γ_{kk}, bzw. $\widetilde{\Gamma}_{kk}$, so erhält man eine zweite orthogonale Normalform der Klasse $\mathfrak{N}_M$.*

Beispiele für die Felder Γ_k, Γ_{kk} findet man in Nr. 18. Damit ist die Existenz orthogonaler Matrizen in der Klasse $\mathfrak{N}_M$ nachgewiesen. Benutzt man nun die Tatsache [19]), daß zwei zueinander ähnliche orthogonale Matrizen auch stets orthogonal-ähnlich sind, so ergibt sich:

Satz XIII. *In jeder Matrizenklasse, und nur in solchen, deren Eigenwerte und Feldzahlen den Bedingungen des Satzes* VII *genügen, ist eine Unterklasse orthogonal-ähnlicher orthogonaler Matrizen enthalten.*

18. Die im Voranstehenden entwickelten Methoden gestatten nun auch, für eingliedrige Gruppen orthogonaler Matrizen Normalformen anzugeben. Eine solche Gruppe läßt sich nämlich, nach Einführung eines geeigneten Parameters u, stets in der Form

$$\Gamma(u) \equiv e^{u\mathsf{A}} = \boldsymbol{E} + u\mathsf{A} + \frac{1}{2!} u^2\mathsf{A}^2 + \frac{1}{3!} u^3\mathsf{A}^3 + \cdots \tag{14}$$

darstellen, wo A eine von u unabhängige Alternante ist; es besteht dann die Funktionalgleichung $\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v)$. Da nun, bei beliebiger regulärer, von u unabhängiger Matrix U die Beziehung $U\Gamma(u)U^{-1} = e^{uUAU^{-1}}$ gilt, so kann man die zu A ähnliche Matrix $\mathsf{A}_1 = U\mathsf{A}U^{-1}$ als alternierende Normalform der Klasse $\mathfrak{N}_\mathsf{A}$ wählen, und dann ist $\Gamma_1(u) = U\Gamma(u)U^{-1} = e^{u\mathsf{A}_1}$ orthogonal und zu $\Gamma(u)$ orthogonal-ähnlich.

Man kann demnach in der Darstellung (14) von vornherein die Alternante A in der durch Satz XI beschriebenen Normalform annehmen. Dann zerfällt aber die Matrix $\Gamma(u)$ in gleicher Weise wie A in Länder und Felder, und es treten analog zu den Feldern A_k, A_{kk}, $\widetilde{\mathsf{A}}_{kk}$ (vgl. § 4 (17), (19), (24)) in $\Gamma(u)$ Felder folgender Art auf:

$$\Gamma_k(u) = e^{u\mathsf{A}_k}, \quad \Gamma_{kk}(u) = e^{u\mathsf{A}_{kk}}, \tag{15}$$
$$\widetilde{\Gamma}_{kk}(u) = e^{u(-i\lambda_h \mathfrak{W}_{kk} + \mathsf{A}_{kk})} = (\cos(-iu\lambda_h)\mathfrak{E}_{kk} + \sin(-iu\lambda_h)\mathfrak{W}_{kk})\,\Gamma_{kk}(u),$$

aus denen also die Matrix $\Gamma(u)$ aufgebaut werden kann. Es gilt:

Satz XIV. *Ersetzt man in der alternierenden Normalform* A, *die nach Satz* XI *bestimmt ist, die Felder A_k, A_{kk}, $\widetilde{\mathsf{A}}_{kk}$ durch $\Gamma_k(u)$, bzw. $\Gamma_{kk}(u)$, bzw. $\widetilde{\Gamma}_{kk}(u)$, so kann die so*

[19]) [L. 1.] § 3.

entstehende Matrix $\Gamma(u)$ als Normalform einer eingliedrigen Gruppe orthogonaler Matrizen verwandt werden.

Für die Felder seien folgende Beispiele angegeben:

$$\Gamma_1(u) = (1), \quad \Gamma_3(u) = \begin{pmatrix} 1 - iu^2 & (1+i)u & -u^2 \\ -(1+i)u & 1 & -(1-i)u \\ -u^2 & (1-i)u & 1+iu^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{(16)} \qquad \Gamma_5(u) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{3}u^4, & u - \frac{2i}{3}u^3, & (1+i)u^2, & iu - \frac{2}{3}u^3, & \frac{1}{3}u^4 \\ -u + \frac{2i}{3}u^3, & 1 - iu^2, & (1+i)u, & -u^2, & iu + \frac{2}{3}u^3 \\ (1+i)u^2, & -(1+i)u, & 1, & -(1-i)u, & (1-i)u^2 \\ -iu + \frac{2}{3}u^3, & -u^2, & (1-i)u, & 1+iu^2, & -u - \frac{2i}{3}u^3 \\ \frac{1}{3}u^4, & -iu - \frac{2}{3}u^3, & (1-i)u^2, & u + \frac{2i}{3}u^3, & 1 - \frac{i}{3}u^4 \end{pmatrix};$$

$$\text{(17)} \qquad \Gamma_{11}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{22}(u) = \begin{pmatrix} 1 & u & iu & 0 \\ -u & 1 & 0 & iu \\ -iu & 0 & 1 & -u \\ 0 & -iu & u & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{33}(u) = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & iu^2 & iu & 0 \\ -u & 1 & u & iu & 0 & iu \\ u^2 & -u & 1 & 0 & iu & -iu^2 \\ iu^2 & -iu & 0 & 1 & -u & u^2 \\ -iu & 0 & -iu & u & 1 & -u \\ 0 & -iu & -iu^2 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $u = 1$, so hat man gleichzeitig die Darstellung der in (12) erklärten Felder Γ_k, Γ_{kk}.

Mit den hier benutzten Hilfsmitteln lassen sich übrigens auch für eingliedrige Schraubungsgruppen explizite Normalformen angeben.

Es liegt auf der Hand, wie man die Ergebnisse der §§ 3—5 zu verwenden hat, um die zu festem n gehörenden Klassen und Normalformen (Typen) zu bestimmen.

Karlsruhe, den 14. Januar 1930.

Eingegangen 16. Januar 1930.